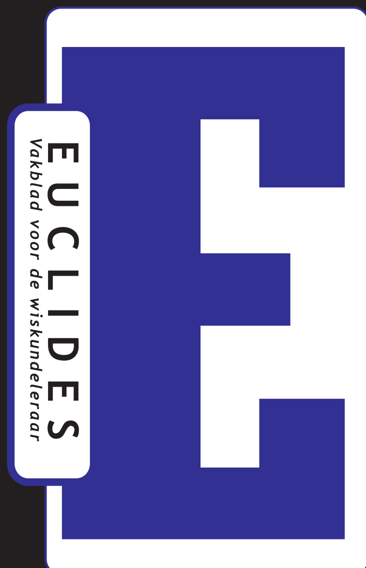
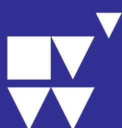


Van Hiele
Huygens
Grootendorst

maart
2005/nr.5
jaargang 80





Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

EUCLIDES
Vakblad voor de wiskundeleraar



Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie

Bram van Asch
Klaske Blom
Marja Bos, hoofdredacteur
Rob Bosch
Hans Daale
Gert de Kleuver, voorzitter
Dick Klingens, eindredacteur
Wim Laaper, secretaris
Jos Tolboom

Inzending bijdragen

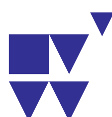
Artikelen/mededelingen naar de hoofdredacteur:
Marja Bos
Mussenveld 137, 7827 AK Emmen
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren, op papier in drievoud.
Illustraties, foto´s en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvvw.nl/euclricht.html

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.nvvw.nl



Voorzitter:
Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: m.kollenveld@nvvw.nl

Secretaris:
Wim Kuipers,
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: w.kuipers@nvvw.nl

Ledenadministratie:
Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
productie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie per verenigingsjaar

Het lidmaatschap is inclusief Euclides.
Leden: € 45,00
Studentleden: € 25,00
Gepensioneerden: € 30,00
Leden van de VVWL: € 30,00
Lidmaatschap zonder Euclides: € 30,00
Bijdrage WwF: € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Niet-leden: € 50,00
Instituten en scholen: € 130,00
Losse nummers, op aanvraag leverbaar: € 17,50
Betaling per acceptgiro.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
Gert de Kleuver
De Splitting 24, 3901 KR Veenendaal
e-mail: g.de.kleuver@wanadoo.nl
tel. 0318-542243

Indien afwezig:
Freek Mahieu
Dommeldal 12, 5282 WC Boxtel
e-mail: freek.mahieu@hetnet.nl
tel. 0411-673468

5

maart 2005 JAARGANG 80

INHOUD

Aan dit nummer werkte verder mee: Jan Smit.

Voorpagina
Telmachine van Auch
'Invenit Jacob Auch, Hof: Mechanicus in Weimar Anno 1800'

Van de redactietafel

[Marja Bos]

Veldraadpleging

Begin februari is op initiatief van het ministerie van OCenW een poging gedaan de gereduceerde havo/vwo-examenprogramma's wiskunde een invulling te geven voor de periode 2007-2010. Daarbij ging het om een herverdeling van leerstofdomeinen over vijf programma's, twee voor havo en drie voor vwo.
Wat mij betreft een kwestie van zoeken naar de minst beroerde oplossingen binnen de uiterst onverstandige kaders die het ministerie heeft uitgezet. Randvoorwaarde was dat de nieuwe programma's binnen de huidige domeinen moesten worden vastgesteld, zodat er vóór 2007 geen nieuwe schoolboeken geschreven hoeven te worden. (Na 2010 kunnen bestaande programma-onderdelen wél weer worden vervangen door nieuwe.)
De uitgewerkte voorstellen van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (zie de website) vormden een belangrijk basisdocument bij de zoektocht naar een mogelijke invulling. De groep personen die zich in februari op uitnodiging van OCenW gebogen heeft over die invulling, heeft nadrukkelijk aangedrongen op een veldraadpleging, zowel met betrekking tot de uitkomsten van de discussie over de herverkaveling als tot de verdeling en verhouding van CE- en SE-stof. Het is namelijk de bedoeling dat een substantieel gedeelte van de domeinen niet meer via het Centraal Examen getoetst gaat worden. In principe geeft OCenW de voorkeur aan een CE-dekking van 60%, maar onze natuurkundecollega's bijvoorbeeld zijn uiteindelijk, na de nodige discussie, uitgekomen op 75%.
De veldraadpleging is inmiddels door het ministerie toegezegd; u kunt dus in de loop van dit voorjaar benaderd worden over deze kwestie. Misschien verloopt dat niet rechtstreeks, maar bijvoorbeeld via de school. Iets om in de gaten te houden.

Voorstellen

De herverkavelingsvoorstellen die aldus aan 'het veld' zullen worden voorgelegd, geef ik hieronder zeer schetsmatig en onder voorbehoud weer, zodat u er vast over na kunt denken.
Havo EM, wiskunde A: ongeveer het huidige programma wiskunde A12, maar zonder de differentiaalrekening;
havo NT, wiskunde B: vooral toegepaste analyse, daarnaast enige ruimtemeetkunde;
vwo EM, wiskunde A: elementaire analyse, differentiaalrekening met toepassingen, statistiek en kansrekening;
vwo NT, wiskunde B: elementaire analyse, differentiaal- en integraalrekening, goniometrische functies, aan te vullen óf met enige vlakke meetkunde óf met extra analyse, mede afhankelijk van de uitkomsten van de veldraadpleging;
vwo CM, wiskunde C: voorlopig ongeveer het huidige programma wiskunde A1 met daarnaast ruimte voor keuzeonderwerpen; na 2010 wellicht meer aandacht voor cultuurhistorische elementen (zebraboekjes?).
Zoals bekend krijgen NG-leerlingen vanaf 2007 in principe de keus tussen wiskunde A en B.
Scholen kunnen NT-leerlingen de mogelijkheid bieden, naast wiskunde B ook wiskunde A te kiezen. Daardoor zouden vwo-NT-leerlingen hun programma misschien kunnen aanvullen met statistiek en kansrekening, terwijl ze de overlap tussen A en B zouden kunnen invullen met andere, verdiepende, onderdelen. Et voilà: *voortgezette wiskunde*.

Van Hiele

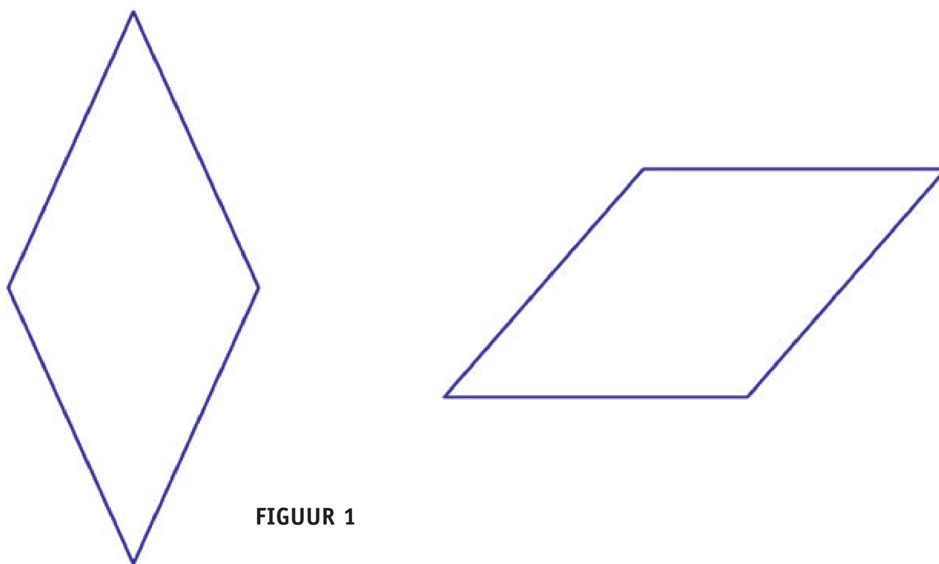
Het openingsartikel van dit nummer is een hommage van Harrie Broekman aan een Nederlandse didacticus van internationale naam en faam, de 95-jarige Pierre van Hiele. Ook in de rubriek '40 jaar geleden' staat Van Hiele deze maand in het middelpunt. Daarnaast wordt er aan hem gerefereerd in de eerste aflevering van onze nieuwe rubriek 'Over wiskundeonderwijs: innovatie en consolidatie'. Onder deze titel houdt auteur Bert Zwaneveld op 11 maart a.s. ook zijn oratie als hoogleraar op het gebied van de professionalisering van de (wiskunde- en informatica-) leraar. Een interessant vakgebied!


Harrie Broekman in gesprek met Pierre van Hiele

HELPEN MET LEREN HELPT!

Een hommage aan Pierre van Hiele

[Harrie Broekman]


FIGUUR 1

Vooraf

Het is onmogelijk in een enkel artikel het werk van Pierre van Hiele zo in het zonlicht te zetten dat de lezer én een totaalbeeld krijgt van dit werk én voldoende concrete aanwijzingen vindt voor zijn of haar dagelijks werk. Daarom is gekozen voor twee artikelen. In dit eerste artikel komen enkele aspecten van Van Hieles werk aan bod waarvan de auteur meent dat ze op dit moment én in de toekomst van belang zijn voor wiskundeonderwijs. Het betreft de zogenaamde niveautheorie, de rol van de aanschouwing in de beginfase van leerprocessen, en het als leraar oefenen in vertrouwen en geduld.
In een later artikel zal nader worden ingegaan op Van Hieles opvattingen over het introduceren en gebruiken van vectoren van basisschool tot en met havo-vwo. Daarbij komen ook zijn opvattingen over 'telescoped reteaching' en een geleid stapsgewijs leerproces aan de orde.

Het leren van de leerlingen

Ter inleiding eerst een aantal citaten.
Uit het NCTM-bulletin van maart 2001, naar aanleiding van een bezoek van Van Hiele aan de VS: 'Sinds de jaren vijftig heeft de Nederlander Van Hiele gewerkt aan het verder ontwikkelen van zijn theorie die niveaus (fasen) beschrijft die leerlingen doorlopen als ze hun meetkundig denken ontwikkelen. Van Hiele benadrukt dat docenten zich van deze niveaus bewust moeten zijn en hun onderwijs zo moeten inrichten dat er rekening mee gehouden wordt.'[1]
Van Hiele stelde in de inleiding van zijn boek *Structure and Insight*: 'If my levels are used well, it is possible to start the teaching and learning of geometry -and many other topics- at a much earlier age than is now usually done.'[2]
Ook het volgende citaat van Van Hiele, uit 1959, is nog steeds relevant: 'De aanbeveling om aan te sluiten bij de ervaringswereld van de leerlingen wordt tegenwoordig bijzonder veel gehoord, maar meestal wordt er een te ongenuanceerde betekenis aan toegekend. (...) Het onderwijs moet weliswaar starten vanuit de ervaringen van de leerlingen, maar het moet er zich noodzakelijkerwijs ook van verwijderen. Wil men leerlingen met bepaalde denkschema's en met de daarvoor noodzakelijke abstracte begrippen vertrouwd maken, dan zou de poging om voortdurend in contact te blijven met de "levende werkelijkheid" tot een veel te moeilijk en ineffectief leerproces leiden. Onderwijs vereist een zekere mate van *isolering van de leerstof* ...'[3]
In 1959 waarschuwde Van Hiele dus al voor ál te veel nadruk op het leren vanuit contexten waardoor de ontwikkeling van het (meetkundig) denken wordt belemmerd.

Uit deze en andere uitspraken van Van Hiele komt naar voren dat hij zijn hele werkzame leven als opvoeder, leraar en onderzoeker op zoek is naar een antwoord op vragen als:
- Hoe vindt de (denk)ontwikkeling van kind en volwassene plaats?
- Welke wetmatigheden zijn er in die ontwikkeling te onderkennen?
- Kunnen de waargenomen wetmatigheden gebruikt worden om die ontwikkeling via onderwijs zo niet te versnellen dan toch minstens te ondersteunen?
In dit artikel zal een beeld geschetst worden van de richting waarin Van Hiele de antwoorden op die vragen zocht door vooral veel te observeren, patronen te zoeken, deze te beschrijven en te proberen ze te verklaren. Discussie met vakgenoten tijdens bijeenkomsten en vooral ook via artikelen in o.a. Euclides nam daarbij een belangrijke plaats in.

Niveautheorie

Ervan uitgaand dat het *denken* van een mens zich in de loop der jaren kan ontwikkelen, proberen we die ontwikkeling te beschrijven en – in het onderwijs – waar mogelijk te sturen.
De Zwitserse psycholoog Piaget bijvoorbeeld nam door observatie van kinderen een vijftal fasen waar in de intellectuele ontwikkeling. Aan deze fasen koppelde hij een aantal leeftijdsperioden met daarbij de suggestie dat het een biologische ontwikkeling betreft. Anderen, zoals de wiskundige en psycholoog Richard Skemp, spraken en schreven liever over *begrijpen* dan over *denken*, maar koppelden dat dan aan een vakgebied zoals wiskunde. Bij het begrijpen in de wiskunde valt volgens Skemp een onderscheid te maken tussen instrumenteel begrijpen (weten hoe) en *relationeel* begrijpen (weten waarom). Deze tweedeling, die in concrete gevallen eventueel verder verfijnd kan worden, is zinvol gebleken bij het kijken/luisteren naar de aanpak van leerlingen, maar ook bij het stellen van vragen aan leerlingen en, meer algemeen, bij het plannen van lessen.
Voor een antwoord op zijn vragen gebruikte Van Hiele, naast vele observaties van lerende kinderen, de ideeën van Piaget als vertrekpunt en boksbal (om zich tegen af te zetten). Dit is terug te vinden in een artikel uit 1982, waar het gaat om het getalbegrip[4]. Hij spreekt daarin over *drie* stadia, als 'werkbare toepassing' van de door Piaget genoemde vijf fasen in de intellectuele ontwikkeling van kinderen:

'Bij de ontwikkeling van begrippen onderscheidt Piaget drie stadia.
Stadium 1: Het kind weet met het begrip hoegenaamd niets aan te vangen. Als het bijvoorbeeld al kan tellen, weet het nog niet wat 'zeven' betekent. Het ziet niet in dat er een 1-1 relatie bestaat tussen 7 eieren en 7 dopjes.
Stadium 2: Het kind heeft wel een globaal begrip van wat er gaande is, maar weet dit niet constant toe te passen. De 1-1 relatie tussen 7 eieren en 7 dopjes ziet het wel als de zaak regelmatig geplaatst is, maar bij een onregelmatige plaatsing raakt het van de wijs.
Stadium 3: Het kind weet met het begrip op de juiste manier om te gaan. Als er 7 dopjes en 7 eieren zijn,

dan weet het van te voren dat er in iedere situatie bij elk dopje precies één ei moet behoren.'

Van Hiele was niet tevreden met deze drie stadia. Hij was immers op zoek naar wat er mogelijk aan die stadia ten grondslag lag, en als didacticus (leraar dus) vooral ook naar de mogelijke leerprocessen waardoor de resultaten kunnen worden verbeterd. In de meetkunde-experimenten van zijn vrouw Dieke van Hiele-Geldof vond Van Hiele mede de inspiratie voor zijn meer theoretische werk aan de niveaus: 'Aandacht voor *aanschouwing* als onmisbare hulp en vertrekpunt voor leren is immers een belangrijk uitgangspunt bij haar experimenten.'[5] Het is dan ook niet verwonderlijk dat een toelichting op de door hem geobserveerde niveaus zich toespitst op meetkunde, ook al is volgens hem de niveautheorie ook bruikbaar voor andere wiskunde-onderdelen dan meetkunde.

Een voorbeeld aan de hand van het begrip 'ruit'. Zie figuur 1 op pagina 266.
Op het *nulde niveau* (grond- of visuele niveau) bekijkt het kind het plaatje visueel: een ruit wordt herkend aan zijn gestalte, meestal zoiets als een salmiakdrop op z'n punt omdat zo'n plaatje de naam 'ruit' heeft gekregen. Een 'liggende' ruit met twee zijden horizontaal wordt dan ook niet als ruit herkend.
Op het *eerste niveau* (beschrijvend niveau) wordt een figuur herkend aan zijn eigenschappen; een ruit heeft vier gelijke zijden, diagonalen die elkaar middendoor delen, diagonalen die de hoeken halveren. Eerst nu zal ook een liggende ruit herkend kunnen worden als ruit.
Pas op het *tweede niveau* (informele deductieve niveau) is de ruit bepaald door zijn definitie: 'Iedere vierhoek waarvan de zijden gelijk zijn, noemt men een ruit.' Bewezen wordt dan dat de diagonalen elkaar loodrecht halveren en dat de diagonalen de hoeken halveren (zie [4], p. 211).
Er is ook nog een *derde niveau*, het theoretisch/deductieve niveau. Dit ontstaat door het bestuderen van de structuur van het tweede niveau: wat is een bewijs, soorten bewijzen, etc. Er zijn bijvoorbeeld de volgende twee definities van een ruit mogelijk: (a) vierhoek met vier gelijke zijden, of (b) vierhoek met twee symmetrieassen die door de overstaande hoekpunten gaan. Afhankelijk van de keuze van de definitie is er een ander bewijs nodig voor de eigenschap 'de diagonalen delen elkaar loodrecht middendoor'.
Overigens is deze indeling arbitrair. Er zijn onderzoekers die slechts drie niveaus onderscheiden en anderen (met name Amerikaanse onderzoekers) die er zelfs zes hanteren.
Omdat niet alleen ieder niveau zijn eigen taal heeft maar er ook anders 'gedacht' wordt, spreekt Van Hiele over *denkniveaus*. Bovendien wordt er op ieder niveau anders geargumenteerd; daarom wordt er nogal eens over *argumentatieniveaus* gesproken.

Zie de tekst binnen het kader voor een probleem dat zich leent om zelf eens in de praktijk te ervaren hoe dat werkt met denkniveaus in leerprocessen.

Zelf uitproberen!
Om een gevoel te krijgen voor de verschillen in niveau zou het volgende probleempje voorgelegd kunnen worden aan zowel jonge als oudere kinderen.
Hoeveel verbindingslijnen worden bepaald door n punten waarvan er geen drie op een rechte lijn liggen?

Vanaf welke leeftijd/scholing begrijpen ze überhaupt wat de vraag is?
Probeer het nog eens, maar dan na vervanging van n door 15. Welke kinderen/volwassenen gaan er dan lukraak lijnen trekken? Wie doet dit systematisch? Welke *argumenten* hanteren ze daarbij? Welke kinderen/volwassenen ontwikkelen een formule? Welke argumenten gebruiken ze daarvoor? Helpt het als ze samenwerken? (Redeneren/argumenteren ze anders?)

Leraar ondersteunt niveauverhoging

In de jaren vijftig en zestig van de vorige eeuw werd leren vrijwel uitsluitend gezien als iets *verwerven*, zoiets als: ergens eigenaar van worden; een gerichtheid op wiskunde als kant en klaar product. Dit combineren met het idee van leren als een *activiteit* (met een gerichtheid op het proces) zoals Van Hiele en zijn vrouw dat voorstonden werd niet zo maar in praktijk gebracht. Heden ten dage zouden we zeggen dat het verwerven van kennis en vaardigheden enerzijds en leren als *activiteit* anderzijds helemaal niet haaks op elkaar hoeven te staan: vaardigheden zijn te verwerven door middel van wiskundige activiteiten. Een lerende wordt in het geval van leren als activiteit meer gezien als iemand die deelneemt aan bepaalde activiteiten dan als iemand die privébezit vergroot doordat leraar of leertekst 'goed kan uitleggen'. Allerlei beslissingen vooraf, tijdens en na afloop van het leren en denken kunnen alleen door de leerling zelf worden genomen. De rol van de leraar verandert daardoor: meer luisteren en observeren, geduld hebben, en helpen door vragen te stellen die de leerlingen laten reflecteren op dat wat ze aan activiteiten ontplooid hebben.
Vertrouwen in de leerling - en daardoor *geduld* - én vertrouwen in de mogelijkheid om deze op te voeden tot intellectuele prestaties spelen een grote rol in het gedachtegoed van Van Hiele. Zij vormen - samen met zijn wens om leerlingen zo veel mogelijk te helpen om tot inzicht te komen - het fundament onder zijn voortdurend zoeken. Gebaseerd op dit fundament zocht Van Hiele in zowel de school-praktijk als in de theorie naar verbeteringen van de leerprocessen van leerlingen. Hij streefde naar inzicht, maar wel door te starten op het niveau waar de leerling zich bevindt. Zo mikte hij op een 'hoog' doel en begon 'laag'.

Een voorbeeld van 'hoog' mikken is te vinden in het citaat uit 1982, over het getal 7 en de eierdopjes. Het woordje 'moet' en de woorden 'weet het van tevoren' verwijzen naar de definitie van inzicht, door Van Hiele in zijn proefschrift van 1957 omschreven als: '... inzicht wordt steeds als zodanig herkend, als de persoon in kwestie intentioneel, adequaat weet te handelen in een nieuwe situatie.'[6]
'Laag' beginnen is te vinden in mijn parafrasering van een ander citaat: 'Onderwijs dat er op gericht is de ontwikkeling van leerlingen aan te moedigen in hun overgang van het ene niveau naar het andere moet beginnen met explorerende activiteiten, zodat de leerlingen geleidelijk tot begrip kunnen komen en de bijpassende taal gaan gebruiken. Belangrijk is daarna het uitvoeren van samenvattende activiteiten om de leerlingen te helpen datgene wat ze geleerd hebben te integreren in wat ze al weten.' (Zie [7], p. 311.)

Rol van de aanschouwing

Van Hiele begon zijn onderzoek aan de hand van de (beginnende) meetkunde-experimenten van zijn vrouw. Hij besteedde extra aandacht aan de beginfase van het leren. Een leren dat zijns inziens gericht diende te zijn op niveauverhoging.
De aanschouwing speelde daarbij een sleutelrol. In 1973 (zie [8]) stelde Van Hiele dat de aanschouwing vooral van belang was als vertrekpunt: het gaat om de voortgang 'van een oordeel gebaseerd op aanschouwing naar een oordeel voortvloeiend uit een relatienet' (dus aanschouwing is goed om mee te beginnen, maar we moeten het daar niet bij laten).
Samen met zijn vrouw schreef hij: 'Wil men echter, dat het wiskundeonderwijs een grote vormende waarde zal hebben, dan zal men zich in dat onderwijs moeten bezighouden met het leren omvormen van concrete (oorspronkelijk niet wiskundige) problemen tot wiskunde'.[9] Dus concreet, contextgebonden als u wilt, is goed in het begin, maar daar moet dan vervolgens wel 'de wiskunde uit gehaald worden' (abstraheren) om te komen tot inzicht.
Evenals De Groot (zie [10]) zag hij in de aanschouwing ook een gevaar: het gevaar van een 'verkeerde' gewoontevorming als gevolg van een te oppervlakkige aanschouwing.
Als een met-inzicht-leren het doel is, zijn reflectie en taalontwikkeling nodig om niet 'gevangen te blijven in de aanschouwing'. (Bij handelen en redeneren louter op basis van aanschouwing horen uitdrukkingen als 'dat is toch zo', 'dat zie je toch'; HB).
Bovendien stelde Van Hiele nadrukkelijk dat het begin vanuit de aanschouwing niet betekent dat vaardigheden veronachtzaamd mogen worden: 'Bij inleidend materiaal moeten de leerlingen zo snel mogelijk een vaardigheid leren en zij moeten de behoefte gaan voelen hun woordenschat uit te breiden': ze moeten iets kunnen doen, iets maken, kortom een succesbeleving hebben en mede daardoor zelf - liefst samen met anderen - er over willen en kunnen praten, en verder willen.

Liefde voor wiskunde(onderwijs)

In Euclides heeft Van Hiele in 1954/55 dit als volgt verwoord: 'Noodzakelijk is, dat men de kinderen liefde voor de wiskunde bijbrengt. Daarin kan men slagen, als men hen eerst de vreugde van het maken van mooie dingen met behulp van wiskunde laat beleven en hen er dan gaandeweg toe brengt ook de beknoptheid en duidelijkheid van de wiskundige bewijsvoering te waarderen.'[11]
Liefde voor het wiskundeonderwijs is en blijft Van Hieles drijfveer. Die liefde heeft de auteur van dit artikel persoonlijk mogen ervaren zoals in de anekdote in het kader hieronder is samengevat.

Anekdote (persoonlijke ervaring)
Van Hiele verfoeide 'oppervlakkige aanschouwing'. Daarmee bedoelde hij 'in feite nauwelijks onder de oppervlakte kijken', en 'gewoon recht toe recht aan foefjes toepassen om standaardopgaven te maken'. Ook rekende hij daartoe praktijken waar je als leraar van opgaven standaardopgaven maakte door er - als docent of bijlesleraar - maar flink veel vóór te doen en dan door de leerling te laten nadoen.
Als beginnend bijlesleraar wist ik dat natuurlijk niet toen ik een leerlinge van hem kreeg. (Haar vader verzocht mij om haar gewoon eens even wat te helpen.) Mijn reactie om haar leraar (Van Hiele) te bellen en een afspraak te maken om over zijn leerlinge te praten werd beloond met een uitnodiging om bij hem thuis langs te komen. Toen kreeg ik mijn eerste officiële didactiekles, maar wel ná een enorme uitbrander én een tirade waarin hij alle bijlesleraren over één kam schoor: 'Al die bijlesleraren zijn zo ontzettend slecht voor de ontwikkeling van het inzicht. Ze zijn alleen maar uit op korte termijn succes en leren de leerlingen alleen wat foefjes aan.'

Een uitdaging

Er zijn *verschillen* tussen mensen, en dus tussen leerlingen. Of en hoe je daar als leraar rekening mee kunt of wilt houden is een kwestie die telkens opnieuw bezien dient te worden tegen de achtergrond van de heersende onderwijskundige en politieke opvattingen.
Nog steeds zoekt Van Hiele passende antwoorden op het probleem van die verschillen tussen lerenden. Hij adviseert dichter bij het leren van wiskunde te blijven, met het oog op de niveaus. Verschillen in aanleg kunnen dan als volgt in positieve zin benaderd worden: 'There is clearly a question of human gifts here. Some people are endowed with very good visual insight; they easily see structures at the first level. But other people have much more trouble with such structures; they much prefer to develop structures at the second level, especially if simple structures of the second level can replace difficult (for them) structures of the first level. Some people have well-developed spatial insight; they see most solutions to solid geometry problems very

easily. Other people never see those solutions; they prefer to use analytic geometry for problems of solid geometry.' (Zie [2], p. 90.)
Hoe we als leraar rekening kunnen houden met die verschillen is niet in z'n algemeenheid te zeggen; daar is geen recept voor, hoe graag we dat ook zouden willen. Maar zeker weten we in ieder geval dat we in veel gevallen de leerlingen langer de kans moeten geven op hun eigen niveau te werken en ze tegelijkertijd moeten uitdagen met vragen die prikkelen tot reflectie en verwoorden. Ook spelachtige situaties kunnen daarbij benut worden, vooral ook omdat daarbij aanschouwing en intuïtie vaak vertrekpunt zijn.[7] Dit proces van reflectie en verwoorden dient plaats te vinden in een samenspraak tussen leerlingen en leraar.
'En dat mag weer: de modegril om de leerlingen alles zelfstandig te laten doen is gelukkig weer voorbij.' (Uitspraak van Van Hiele in een telefonisch gesprek over te verwachten veranderingen in het wiskundeonderwijs in 2004.) Deze uitspraak is nu we opnieuw werken aan veranderingen in het wiskundeonderwijs zeker actueel en dient dan ook gezien te worden als een uitdaging.

Tot slot

Van iedere onderwijskundige en/of vakdidactische theorie kan wel gezegd worden dat onderdelen ervan tijd- en plaatsgebonden zijn en in ieder geval na nieuwe onderzoeksbevindingen aanpassing of uitbreiding behoeven. Dit neemt niet weg dat sommige elementen van een theorie als theoretische noties van belang blijven voor zowel de verdere theorievorming als - zeker zo belangrijk - voor de dagelijkse schoolpraktijk. Van de ideeën van Pierre van Hiele is in ieder geval duidelijk dat de noties betreffende het *aansluiten bij de ervaringswereld van de leerlingen*, evenals de noties betreffende *rekening houden met denkniveaus bij het introduceren van nieuwe onderwerpen*, en het belang van de *aanschouwing* nog altijd de moeite waard zijn om te bestuderen. Dit ondanks het feit dat de onderwijswereld veranderd is.
Maar dat niet alleen: zonder deze noties komt de discussie over het 'wat' (welke wiskunde) en het 'hoe' (op welk moment, op welk niveau en met behulp van welke contexten) niet verder dan een praten op grond van intuïtie. En dat is één van de zaken waar Van Hiele beslist niet van gediend was en is. Dat in de (vak)didactische discussies door Van Hiele soms politiek onhandige (op dat moment ongewenste) uitspraken werden gedaan, heeft hemzelf er niet van weerhouden vol te houden.

'Helpen met leren helpt, een hommage aan Pierre van Hiele', heeft als boodschap dat het zin heeft als leraar te blijven nadenken over manieren van lesgeven. We kunnen onze leerlingen helpen met leren mede door te observeren, hen vragen te stellen en vooral door naar hen te luisteren. De niveaus en verdere aandachtspunten van Van Hiele kunnen ons daarbij helpen. *'Men kan zich ten doel stellen de kritische zin van leerlingen te ontwikkelen. Dit streven is niet bepalend voor de onderwerpen die behandeld moeten worden. Wat erop aankomt is de wijze waarop de leraar voor de klas staat. Hij moet niet zijn de man die zijn verhaal houdt en alles weet, zijn les moet integendeel een gesprek zijn waarbij de leerlingen hun eigen inbreng en hun eigen mening hebben.'*[12]

Met dank aan dr. N.C. Verhoef voor haar zeer waardevolle inbreng.

Bronnen

[1] NCTM News Bulletin, March 2001, p. 8.
[2] Pierre van Hiele: Structure and Insight - A Theory of Mathematics Education. Orlando: Academic Press (1986).
[3] P.M. van Hiele: Voordracht Weekendconferentie van de Wiskunde Werkgroep WVO. November 1959. Gepubliceerd in Euclides 35, pp. 177-186.
[4] Dr. P.M. van Hiele: Fasen en stadia in de ontwikkeling van het denken bij kinderen. In: Ped. Tijdschrift/Forum v. Opvoedkunde 7 (5), pp. 207-218 (1982).
[5] Persoonlijke communicatie bij voorbereiding van het HKRWO-symposium; mei 2003.
[6] P.M. van Hiele: De problematiek van het inzicht. Proefschrift (1957).
[7] Pierre M. van Hiele: Developing Geometric Thinking through Activities That Begin with Play. In: Teaching Children Mathematics 5 (6), pp. 310-316 (1999).
[8] P.M. van Hiele: Begrip en Inzicht. Purmerend: Muusses 1973).
[9] P.M. van Hiele en D. van Hiele-Geldof, Euclides (1954)
[10] Prof.dr. A.D. de Groot: De psychologie van het denken en het meetkundeonderwijs. In: Euclides 30, pp. 224-236 (1954/1955).
[11] P.M. van Hiele: Pakkend materiaal ter inleiding van meetkundige grondbegrippen. In: Euclides, 30, p. 253 (1954).
[12] P.M. van Hiele: Op weg naar oplosmethoden met ruime toepasbaarheid. In: Wiskundige Problemen en Toepassingen, Mathematisch Instituut, Rijksuniversiteit Groningen (1984).

Over de auteur

Harrie Broekman (e-mailadres: H.G.B.Broekman@phys.uu.nl) heeft gewerkt als leraar, lerarenopleider en vakdidacticus. Daarbij heeft hij zich altijd gesteund gevoeld door mensen als Van Hiele, doordat deze hun leven lang bleven zoeken naar manieren om het leren van kinderen en volwassenen te ondersteunen.

Dr. P. M. van Hiele en Dr. D. van Hiele-Geldof, *Van figuren naar begrippen* 3, Muusses, 1963. Prijs niet vermeld.

De waardering, die ik voor deel I en deel II van dit boek had, kan ik onveranderd voor deel III opbrengen (zie Euclides 39e jaargang p. 284). En de door mij geplaatste vraagtekens plaats ik weer. Veel waardering dus en veel vraagtekens.

In het begin van dit boek zie ik onopvallend staan – in deel I en deel II was het mij ontgaan – „Volledige leergang voor scholen, waar zelfstandig werken en denken hoofdzaak is". Dat pretendeert nogal wat. Elke docent, die niet uit de pas wil lopen, zegt dan, dat hij erbij moet zijn. Je kunt toch voor je fatsoen niet zeggen dat je de waarde van zelfstandig werken en denken niet zo bar hoog aanslaat! De auteurs dwingen ons met deze aankondiging wel om van hun werk kennis te nemen. Dat wil ik graag en niet alleen vanwege het fatsoen. Een tweede hoofdzaak zou ik er echt wel aan willen toevoegen. Is het ook geen hoofdzaak, dat de leerling een heel klein beetje liefde voor het vak gaat voelen, dat er ambitie voor „het vraagstuk" wordt gekweekt? En is het geen hoofdzaak dat de natuurlijke drang zich te meten met iets of met iemand, wordt omgebogen naar de drang zich te meten met niet op een rij gezette opdrachten, ontleend aan het machtige spel, dat meetkunde heet? De auteurs en ik verschillen wellicht van mening over de inhoud van dat spel. Mogelijk interesseren zij zich het meest voor de bereiding van de gerechten, die de wiskundige kok opdient; mij laten die gerechten zelf niet geheel onverschillig. Ik zie zo veel methode en betrekkelijk weinig resultaat; zo weinig verrassende resultaten uit het gebied der driehoeksmeetkunde. Het is in de moderne meetkunde schrappen geblazen; de meetkunde van de school wordt hoe langer hoe minder doel, het is al methode wat de klok slaat. Dreigt het systeem niet in het niets te verzanden? Zo zie ik in dit boekje charmante hoofdstukken over vectoren, over afbeeldingen, maar waar zie ik de oogst van deze middelen? Komt die later? Is „dat komt later – als je groot bent" – een antwoord, dat een kind bevredigt?

De theorie wordt al vragend en suggererend opgebouwd; als een leerling zelfstandig de schakels kan aanbrengen, ja, dan kan hij zelfstandig werken en denken . . . aan het handje geleid. Maar die opbouw is bijzonder mooi uitgevoerd!

Ik zou graag willen weten hoe of dit boek moet worden gebruikt. Wat gebeurt er met de leerling, die de schakels niet zelf kan vinden en bevestigen? Worden de bewijzen klassikaal genoteerd? Zijn sommige leerlingen verder gevorderd dan anderen? Is het boek daarom voor normaal klassikaal gebruik wel geschikt? Hoe vindt de controle plaats op het verwerkt hebben? Proefwerken met een theoretische inslag?

De inhoud geeft een restant van de traditionele leerstof; het is niet het gebruikelijke derde deel over de cirkels. Dat vind ik een pluspunt, want een deel der cirkelstof kan mij gestolen worden. Behalve die opruiming van cirkelrestanten en de genoemde passages over vectoren en transformaties komt tenslotte een hoofdstuk over algemene methoden voor het oplossen van meetkundige vraagstukken". Daarop had ik al een tijd zitten wachten en mijn wachten werd dus beloond. Een grote stap tot de vrede!

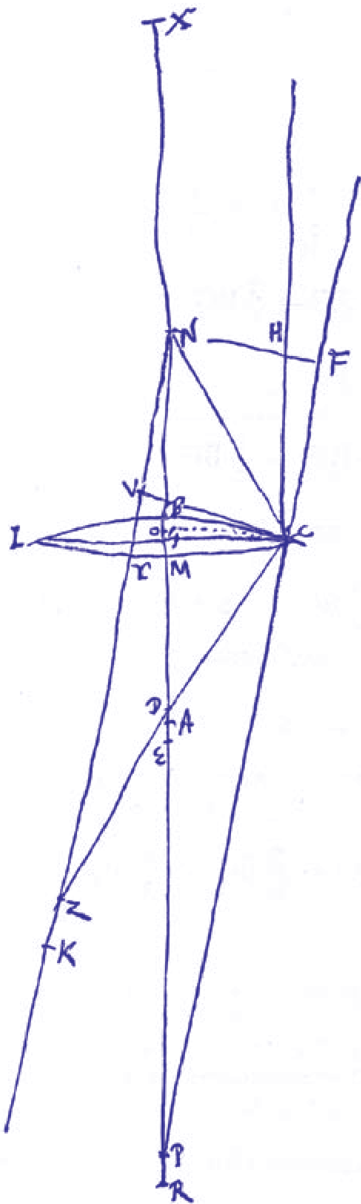
Heyermans laat zijn Wijze Kater aan een fijn diner vragen om een lekker bakkie doodgewone melk. Mag uw zeker niet wijze berichtgever nu ook vragen om een lekker bakkie, zij het dan niet gevuld met melk maar met wat hartige sommetjes? Het bakkie wordt wel aangeboden in de vorm van 29 „vragen" over de regels der wiskunde. Ik had er wel een paar honderd gelust. Misschien kan hier en daar een enkele leerling mijn hongerig gevoel waarderen. Dat zou dan die ene kunnen zijn, aan wie de liefde voor het spel, dat meetkunde is, niet is voorbijgegaan.

Veel waardering en veel vraagtekens. Over het laatste heb ik in verhouding te veel gezegd, over mijn waardering te weinig. De auteurs kunnen zich daarvan verzekerd weten. Moge uitgebreid met dit boek worden geëxperimenteerd.

Groenman

Boekbespreking door J.T. Groenman in Euclides 40 (1964-1965), blz. 251-252.

De rubriek '40 jaar geleden' wordt verzorgd door Martinus van Hoorn (e-mail: mc.vanhoorn@wxs.nl), voormalig hoofdredacteur van Euclides (1987-1996).





Huygens heeft zich zijn hele leven bezig gehouden met de eigenschappen van lenzen. Hij ontwikkelde een lenstheorie en was de eerste die de lensformule afleidde, waarbij hij ook een theorie van sferische aberratie uitwerkte. In een lens met bolvormige oppervlakken worden niet alle stralen netjes naar één punt gebroken. Hoe verder de straal van de as, hoe verder van het brandpunt. Hier het geval van een biconvexe lens. *DE* is de aberratie van de straal *HC*. De vraag is op welke wijze de aberratie samenhangt met de vorm van de lens. Gegeven a de kromtestraal van de voorzijde *IBC* is, en n die van de achterzijde *CMI*. Huygens laat zien dat de aberratie gevonden wordt door de dikte *BM* van de lens te vermenigvuldigen met de uitdrukking

$$\frac{7n^2 + 6an + 27a^2}{6(a+n)^2}$$

De vraag waar het Huygens uiteindelijk om ging was voor welke lens de afwijking minimaal is.
Dat kunnen wij tegenwoordig vrij gemakkelijk uitrekenen. Huygens gebruikte een regel voor nulpunten die zijn studiegenoot Johannes Hudde had bedacht. Die is op internet wel te vinden. Huygens vond een minimum wanneer $a : n = 1 : 6$.

Uit: *Oeuvres Complètes de Christiaan Huygens*, deel 13, blz 360.

HUYGENS BIJ DE LES

Aandacht op school voor Christiaan Huygens, de moeite waard! Een bespreking naar aanleiding van de recentelijk verschenen Huygens-biografie door Rienk Vermij.

[Fokko Jan Dijksterhuis]

Geleerde in de Gouden Eeuw

In de reeks wetenschappelijke biografieën van Natuur Wetenschap & Techniek is het nu de beurt aan Nederlands grootste wetenschapper: Christiaan Huygens (1629-1695). Middenin de Gouden Eeuw was Huygens een veelzijdig geleerde die uitblonk in wiskundig vernuft, zowel in theoretische als praktische zin. Zijn prestaties zijn talrijk: van de uitvinding van het slingeruurwerk tot het beginsel voor golfvoortplanting, van de ontdekking van de maan en ring van Saturnus tot de theorie van slingerbeweging, van de botsingswetten tot de regels 'in spelen van geluck', van de kwadratuur van parabolen tot het huygense oculair, van het 31-toons-stelsel tot speculaties over de beschavingen op andere planeten. Het enige gemis in vergelijking met tijdgenoten als Galileï, Descartes en Newton is het gebrek aan een overkoepelende gedachte of een richtinggevend programma. Huygens excelleerde in het formuleren en – meestal – oplossen van wiskundige vraagstukken en vond daarin ook zijn uiteindelijke bevrediging. Bij grote doorbraken noteerde hij 'Eureka', in de geest van Archimedes, de grote Griekse mathemaat met wie hij al op jonge leeftijd werd vergeleken. De Franse geleerde Mersenne schreef vader Huygens in 1647 over diens toen zeventienjarige zoon: 'Als hij zo doorgaat, zal hij Archimedes nog eens overtreffen.'[1]

Oeuvres Complètes

Het was dan ook vanzelfsprekend dat David Bierens de Haan aan het eind van de 19e eeuw het initiatief nam om een monument voor de grote vaderlandse geleerde op te richten. Bierens de Haan was een belangrijke voortrekker van de Nederlandse wiskunde, die aan de wieg stond van het Nieuw Archief en talloze andere activiteiten op organisatorisch en internationaal gebied verrichtte voor de jonge gemeenschap van Nederlandse wiskundigen. De *Oeuvres Complètes de Christiaan Huygens* verschenen in 22 delen tussen 1888 en 1950 en zijn inmiddels voor iedereen toegankelijk via de website van de Franse nationale bibliotheek. Het is geen gemakkelijke kost: correspondentie en handschriften met 17e-eeuwse wiskunde en natuurfilosofie in voornamelijk Frans en Latijn. Wie echter het origineel van Huygens' gedachtengang over het botsen van lichamen wil raadplegen, vindt die in deel 16 van de Oeuvres Complètes. Daarin staat de originele Latijnse tekst van 'De Motu Corporum ex Percussione' met een Franse vertaling en toelichting, plus een transcriptie van allerlei relevante manuscripten.

De biografie

Rienk Vermij is wetenschapshistoricus die publiceerde over tal van onderwerpen uit de wetenschap van de 17e en 18e eeuw, waaronder Bernard Nieuwentijt (één van de pioniers hier te lande op het gebied van de infinitesimaalrekening) en de verspreiding van het Copernicaanse gedachtengoed in de Republiek. Zoals verwacht mag worden is zijn levensbeschrijving van Huygens historisch verantwoord. *'Christiaan Huygens. De Mathematisering van de Werkelijkheid'* is daarbij toegankelijk geschreven en rijkelijk geïllustreerd. Het mag in geen enkele schoolbibliotheek ontbreken. Welke betekenis heeft Christiaan Huygens nu voor de wiskunde en voor het hedendaagse wiskundeonderwijs? Alvorens die vraag te beantwoorden, moeten we ons eerst afvragen wat Huygens nu precies was. Zijn prestaties zouden wij merendeels onderbrengen bij de mathematische

fysica en de techniek. Huygens heeft wel het nodige gedaan op het gebied van de wiskunde sec – te denken valt aan de theorie van kettingbreuken en zijn leer van evoluten en involuten – maar ook die zijn nauw verbonden met zijn fysica en instrumenten. Desalniettemin was Huygens in de eerste plaats een wiskundige. Een 17e-eeuwse wiskundige wel te verstaan, en dat betekent dat ons onderscheid tussen zuivere en toegepaste wiskunde, tussen wetenschap en techniek niet goed van toepassing is. Zeventiende-eeuwse wiskunde was 'gemengde' wiskunde, waarin de werkelijkheid –in toenemende gradaties van abstractheid– in mathematische termen werd begrepen. En waarin musica, optica, astronomie, mechanica een gelijkwaardige plaats hadden naast meetkunde en rekenkunde. Vrijwel al Huygens' prestaties vallen onder de paraplu van deze gemengde wiskunde. Huygens was echter geen doorsnee mathemaat. Hij onderscheidde zich door een voorliefde voor 'tastbare' vraagstukken zoals de eigenschappen van een fysische slinger en de onnauwkeurigheden van concrete lenzen. Ook legde hij een bijzondere belangstelling aan de dag voor de praktische kant van wiskunde, met name waar het ging om instrumenten zoals de klok en de telescoop. Huygens' wiskunde is niet bepaald toegankelijk voor ons of onze leerlingen. Het is grotendeels ouderwets meetkundig – dus een hele hoop verhoudingen en constructies – met de algebraïsche draai die daar door Descartes aan gegeven was. Huygens heeft zijn wiskunde geleerd van de Leidse hoogleraar Frans van Schooten de jongere. Van Schooten is een belangrijk figuur in de geschiedenis van de wiskunde, omdat hij Descartes' *La Géométrie* in het Latijn vertaalde, toelichtingen en commentaar toevoegde (onder meer van zijn leerlingen) en zo de nieuwe Cartesiaanse meetkunde ontsloot voor de internationale gemeenschap van wiskundigen (waaronder bijvoorbeeld Newton). De wiskunde die Huygens bij Van Schooten leerde, was nog echt meetkundig: krommen in plaats van grafieken, exhaustie in plaats van integreren. Pas op het laatst van Huygens' leven wist zijn leerling Leibniz hem van de waarde van de nieuwe calculus te doordringen. Ook de fysica is hier en daar al aardig pittig. Wetenschapshistoricus E.J. Dijksterhuis merkte op dat Huygens de vroegste natuurwetenschapper is die je met je middelbareschoolkennis niet meer kunt volgen. Desalniettemin zijn er allerlei plaatsen in de *Oeuvres Complètes* waar een behapbaar gemengd-wiskundig vraagstuk te bestuderen is.
Enkele onderdelen van Huygens' oeuvre zijn inmiddels ontsloten voor hedendaagse belangstellenden en scholieren. De biografie van Rienk Vermij biedt uitstekend overzicht van Huygens' lotgevallen en prestaties. Het relaas gaat niet in op wetenschappelijke details, maar biedt wel mooie illustraties en de noodzakelijke context. Jammer genoeg bevat de tekst geen verwijzingen naar de *Oeuvres Complètes*, zodat het voor de leek lastig is de bijbehorende bronnen te vinden.

Zebraboekje

Ook het Zebraboekje over Huygens dat bij Epsilon is verschenen, biedt een goed overzicht van Huygens' leven en werk, maar ook hier mis ik verwijzingen naar de bronnen. Dit gemis wordt hier goed gemaakt door reeks vraagstukken waarin leerlingen zijn werk stap voor stap onderzoeken. *Christiaan Huygens* bevat een beknopte biografie, wederom van de hand van Rienk Vermij. Het is een historisch verantwoorde schets, enthousiast en in leerlingentaal geschreven. In opgaven over onderwerpen als de toverlantaarn, de kansrekening, botsingen en slingers wordt de hedendaagse 'middelbareschool wis- en natuurkunde' gekoppeld aan het denken van Huygens en zijn tijdgenoten. Zelfs de M-profiel-leerlingen komen aan hun trekken met opgaven over poëzie en kunnen uit de voeten bij de toverlantaarn en de kansrekening. (Ernst Lambeck gaat op pagina 276 in dit blad wat gedetailleerder op deze uitgave in.)

Spelen van Geluck

De mooiste uitgave voor de wiskundeles is *Van Rekeningh in Spelen van Geluck*, in 1998 door Epsilon uitgegeven. Het betreft hier een facsimile van de oorspronkelijke publicatie met een hertaling in hedendaags Nederlands, aangevuld met inleiding, toelichting en de oplossingen voor de vraagstukken waarmee de tekst afsloot, alle van de hand van Wim Kleijne. Huygens was niet de ontdekker van de kansrekening, hij kwam met de eerste inzichten van Pascal en Fermat in aanraking tijdens zijn bezoek aan Parijs in 1656. Hij was wel de eerste die een systematische wiskundige behandeling uitwerkte en publiceerde. Frans van Schooten zag ook hier het belang van in. Hij vertaalde de tekst in het Latijn en nam het werkje op in zijn *Exercitationum Mathematicorum* (1657). Het Nederlandse origineel volgde snel in de 'Mathematische Oeffeningen' (1660). *De Ratiociniis in Ludo Aleæ* bleef tot in de 18e eeuw de belangrijkste inleiding in het nieuwe vakgebied van de kansrekening. Of zouden we moeten zeggen: verwachtingsrekening? Het gaat namelijk niet om de vraag hoe kansen in de wereld van het dobbelen verdeeld zijn. Onzekerheid was in die tijd een probleem van de beperkte menselijke vermogens, niet van een willekeur in de natuur. De vraagstukken van Huygens gaan daarom over de vraag wat men redelijkerwijs kan verwachten in een spel, en wat dus een verstandige inzet is. Het vergt enig denkwerk van de leerling om Huygens' benadering te doorgronden, maar dat levert dan een verdieping van het kansbegrip op. Kortom: een boekje dat in elk wiskundelokaal aanwezig moet zijn.

Meer over Huygens

Epsilon heeft al langer geleden twee andere, minder wiskundige teksten van Huygens uitgegeven. *Traité de la Lumière* uit 1690 was zijn verhandeling over de golftheorie van licht en een mooi voorbeeld van fysisch redeneren. De Nederlandse vertaling van Dieuwke Eringa staat naast een facsimile van

het oorspronkelijke Frans. *Kosmotheoros* werd in 1698 postuum gepubliceerd. Het bestaat uit twee brieven aan zijn broer Constantijn, waarin Christiaan de vraag stelt of het *denkbaar* is dat er leven op andere planeten is en hoe dat er uit moet zien. Huygens beweert niet dat dat bestaat, maar betoogt alleen dat het op voorhand redelijkerwijs niet uit te sluiten is. De tekst biedt een mooi, vroeg voorbeeld van verlicht denken. De vraag geeft Huygens de mogelijkheid zijn visie op het wezen van de menselijke beschaving uiteen te zetten, waarbij hij de stand van de toenmalige wetenschap én zijn bijdrage daaraan schetst. Een fascinerend testament, dat het meestgelezen boek van Huygens zou worden. Het Latijnse origineel werd al snel vertaald in het Nederlands, Frans, Engels en Russisch. De Epsilon uitgave bestaat uit een facsimile van de vertaling uit 1699 door Petrus Rabus.

Instrumenten in Museum Boerhaave

In Museum Boerhaave in Leiden zijn tal van instrumenten van Huygens te bewonderen: klokken, lenzen en zijn planetarium. In de vitrines liggen oorspronkelijke uitgaven en voorbeelden van zijn handschriften. De website van het museum biedt ideeën voor werkstukken en praktische opdrachten, en twee uitgaven over Huygens zijn elektronisch beschikbaar. Tot slot is er het Huygens Web dat, naast biografische en bibliografische informatie, teksten en vertaling van Huygens' astronomische werk bevat: het pamflet met de ontdekking van de maan van Jupiter en *Systema Saturnium*, waarin hij tevens zijn ring-theorie uiteenzet.

Huygens op school

Al met al is er over onze grootste geleerde een hoop materiaal beschikbaar voor een mooie les of een stevig werkstuk. Is het de moeite waard? Natuurlijk! Geen leerling mag de wiskundeles verlaten zonder kennis te hebben genomen van deze belangrijke cultuurdrager. Eigenlijk zou dit niet alleen de verantwoordelijkheid van de wiskundeleraar moeten zijn, maar van de hele school. Waarom zou een wiskundige niet behandeld kunnen worden in de geschiedenisles?

Rienk Vermij: *Christiaan Huygens. De Mathematisering van de Werkelijkheid.* Wetenschappelijke Biografie 7. Diemen: Veen Magazines, 2004.
ISBN 90 76988 358. € 32,50.

Noot

[1] OC1, 47. 'Je ne croy pas s'il continue, qu'il ne surpasse quelque jour Archimede, ...'

Bronnen

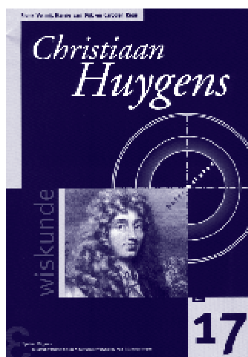
- Oeuvres Complètes de Christiaan Huygens. Publiées par la Société Hollandaise des Sciences, 22 delen, Den Haag: Martinus Nijhoff, 1888-1950. Te raadplegen via http://gallica.bnf.fr (kies 'Recherche' en zoek op auteur 'Huygens'): de afzonderlijke delen zijn gescand en naar pdf-formaat gezet, ze kunnen doorgebladerd worden of gedownload.
- Rienk Vermij, Hanne van Dijk en Carolien Reus: Christiaan Huygens (Zebra-reeks nr. 17). Utrecht: Epsilon Uitgaven (2004). ISBN 90-5041-082-0. € 9,00 (voor leden: € 7,00). Zie pagina 276.
- Christiaan Huygens: Van Rekeningh in Spelen van Geluck. Vertaald en toegelicht door Wim Kleijne. Utrecht: Epsilon Uitgaven (1998). ISBN 90-5041-047-2. € 8,00
- Christiaan Huygens: Verhandeling over het licht. Vertaald door Dieuwke Eringa met een biografische schets van Henk Bos. Utrecht: Epsilon Uitgaven (1990). ISBN 90-5041-022-7. € 19,00
- Christiaan Huygens: Cosmotheoros, de wereldbeschouwer. Utrecht: Epsilon Uitgaven (1989). ISBN 90-5041-015-4. € 19,00 (ook online op het Huygens Web).
- Huygens Web: www.phys.uu.nl/~huygens/
- Museum Boerhaave: www.museumboerhaave.nl. (Ga naar ANW; bij het leerlingenmateriaal zijn enkele uitgaven over onder meer Huygens te vinden.)

Over de auteur

Fokko Jan Dijksterhuis is als wetenschapshistoricus verbonden aan de Universiteit Twente. Hij doet onderzoek naar de wiskundige wetenschappen in de 16e tot 19e eeuw. Hij schreef een proefschrift over Huygens' optica, waarvan een gereviseerde versie onlangs bij Kluwer verscheen: 'Lenses and Waves. Christiaan Huygens and the Mathematical Science of Optics in the Seventeenth Century'. Hij is tevens bestuurslid van Gewina, het Nederlandse genootschap voor belangstellenden in de wetenschapsgeschiedenis. Voor uw vragen over wetenschapsgeschiedenis in het algemeen kunt u terecht op www.gewina.nl; voor specifieke vragen over Huygens en de vroegmoderne wiskundige wetenschappen kunt u altijd bij hem zelf aankloppen: f.j.dijksterhuis@utwente.nl.

Boekbespreking / Christiaan Huygens (Zebra 17)

Auteurs: Rienk Vermij, Hanne van Dijk en Carolien Reus – Uitgever: Epsilon Uitgaven, Utrecht (2004)
isbn 90 5041 082 0 – Prijs voor niet-leden: € 9,00 (voor leden: € 7,00) **[Ernst Lambeck]**



Omwenteling

De 17e eeuw is voor de natuurwetenschappen een belangrijke periode. Het wereldbeeld van Aristoteles (alle dingen hebben hun eigen eigenschappen en hun vaste plaats) domineert aan het begin van de eeuw. Nieuwe ontdekkingen, zoals die van Galileo Galileï rond 1610, blijken echter slecht te passen bij dit beeld. In 1644 komt René Descartes met het idee dat de dingen om ons heen uit kleine deeltjes bestaan. Deze deeltjes moeten natuurwetten, wiskundig van aard, gehoorzamen. Hiermee wordt een omwenteling in de natuurwetenschappen in gang gezet die aan het eind van de 17e eeuw eindigt met het werk van Newton, wat de eeuwen daarna de grondslag voor de natuurkunde zal zijn. In deze omwenteling speelt Christiaan Huygens een voorname rol met zijn theorieën over onder meer de valbeweging, de slingerbeweging en de voortplanting van het licht.

Huygens

Christiaan Huygens (1629-1695) is in zijn tijd een groot wetenschapper. Hij is ca. 15 jaar lang betaald lid van de Académie Royale des Sciences, zelfs ten tijde van de oorlog tussen de Republiek der Nederlanden en Frankrijk. Zijn broer is dan secretaris van stadhouder Willem III. Christiaan Huygens is een wetenschappelijke duizendpoot. Hij houdt zich bezig met muziektheorie, sterrenkunde, natuurkunde en wiskunde. Hij beperkt zich niet alleen tot de theorie of de experimentele kant, vaak combineert hij beide met de ontwikkeling van nieuwe instrumenten: van kijkers en microscopen tot lenzenslijpmachines en slingeruurwerken.

Opzet

Uiteraard kan in ruim 50 bladzijden geen recht worden gedaan aan het omvangrijke werk van Christiaan Huygens. In het hier te bespreken boekje wordt daarom vooral aandacht geschonken aan zijn werk op het gebied van de vrije val, botsingsregels, slingers en kansrekening. Zijn werk over het golfkarakter van het licht wordt slechts kort besproken.
De opzet van het boekje is aardig. De tekst is nauwelijks wiskundig van aard, waardoor ook de A-leerlingen kennis kunnen maken met werk en leven van deze grote, maar tamelijk onbekende, Nederlander. De wiskunde zit verstopt in de opgaven, die meestal goed te doen zijn (ook voor een A-leerling). De opdrachten zijn divers: een aantal is eenvoudig (soms zelfs zonder wiskunde) en lijken op het lijf van een A-leerling geschreven, terwijl andere opdrachten aanleiding kunnen geven tot een mooi stuk wiskunde – een uitdaging voor de echte B-leerling.

Opgaven

De opgaven over de botsingsregels en het slingeruurwerk vallen echter wat tegen. Met behulp van de wetten van behoud van impuls en kinetische energie moeten enige botsingen worden doorgerekend. De opgave over het slingeruurwerk is te eenvoudig: gegeven het tijdverlies per dag van twee klokken moet bijvoorbeeld worden berekend na hoeveel dagen de beide klokken een half uur achter lopen.
De opgaven over de vrije val en de kansrekening zijn daarentegen een stuk interessanter. Galileï beweert: ‘De lengtes die een vallend lichaam in opeenvolgende gelijke tijdsintervallen aflegt, verhouden zich tot elkaar als de opeenvolgende oneven getallen.’ Huygens bewijst, uitgaande van het beginsel dat de wiskundige formulering van de valwet niet mag afhangen van de gebruikte tijdseenheid, dat alle valwetten die afwijken van de regel van de oneven getallen onjuist moeten zijn. Na een paar opgaven waarbij de leerling gebruik moet maken van de moderne formules wordt onderzocht of de huidige regels overeenkomen met het idee van Galileï.
De kansrekening komt aan bod in twee opgaven. De leerling moet eerst op een moderne manier een probleem oplossen. Hierbij komt onder andere de som van een oneindige meetkundige rij om de hoek kijken. Vervolgens moet in een tweede opgave hetzelfde probleem op de manier van Huygens worden opgelost.

Conclusie

We mogen concluderen dat het boekje alweer een mooi deel van de Zebrareeks is. Het laat de leerlingen kennis maken met een van onze grootste geleerden. Hopelijk heeft het op de leerlingen eenzelfde uitwerking als op uw recensent: ik ben na lezing van dit boekje op zoek gegaan naar meer informatie over het werk van Christiaan Huygens.

Noot (red.)

Zie voor meer ‘Huygens-werk’ ook de bijdrage van Fokko Jan Dijksterhuis op pagina 272, ‘Huygens bij de les’.

Over de recensent

Ernst Lambeck (e-mailadres: ernstwl@westbrabant.net) is als docent wiskunde werkzaam aan het Newmancollege te Breda. Daarnaast is hij voorzitter van de opgavencommissie van de Kangoeroe.



IN MEMORIAM PROF. DR. A.W. GROOTENDORST 1924–2004

[F. van der Blij]

Op 22 december jl. overleed prof. dr. A.W. Grootendorst, emeritus hoogleraar aan de TU Delft.
Hij behoorde tot de wiskundehoogleraren die in brede kring door wiskundeleraren gekend en gewaardeerd werden. Misschien was dat niet in de eerste plaats door zijn wetenschappelijk werk op het gebied van de getaltheorie, maar zeker wel door zijn nauwe betrokkenheid bij de vakantiecursussen van het Centrum voor Wiskunde en Informatica (het Mathematisch Centrum) en zijn belangstelling voor en activiteiten op het gebied van de geschiedenis van de wiskunde, speciaal in de Nederlanden.

Voor de vakantiecursus was hij vele jaren de drijvende kracht: hij koos de onderwerpen, enthousiasmeerde de sprekers over de mede door hem aangedragen thema's en verzorgde de inleiding.
Maar meestal was hij ook zelf een van de sprekers over een thema dat paste in het gekozen onderwerp. En die thema's konden heel verschillend zijn, maar vaak wel op het gebied van de geschiedenis, hetzij de klassieke hetzij de vaderlandse. Ik noem enkele titels: 'Eudoxus en Dedekind', 'De meetkundige algebra bij Euclides', maar ook 'Analytische meetkunde, het begin' en 'Algebraïsche en aritmetische eigenschappen van complexe getallen'. De cursus in 1994 ging over Computeralgebra, dus zocht Grootendorst een hem passend onderwerp en hij verdiepte zich in de vraag over het 'Primitiveren door middel van elementaire functies'. En iedere keer was er een spannend verhaal en een mooi artikel in de syllabus.

Maar het meest boeide hem het onderwerp waarover hij in 1995 sprak: 'De "Kegelsneden" bij Johan de Witt'. Hij verzorgde de vertaling en uitgave van Johan de Witts 'Elementa Curvarum Linearum', waarbij hij zijn liefde voor en kennis van zowel de klassieke talen als de wiskunde kon benutten.
Natuurlijk zijn er nog vele andere activiteiten van hem te noemen. Ik denk bijvoorbeeld aan zijn zorg voor de archieven van Nederlandse wiskundigen, aan lezingen voor Delftse studenten, aan de mede door hem uitgegeven werken als 'Caleidoscoop van de Wiskunde' en 'Grepen uit de Geschiedenis van de Wiskunde'.

Wij zullen een goede en dankbare herinnering aan hem bewaren.

Over de auteur

F. van der Blij was tot 1988 hoogleraar wiskunde aan de Universiteit Utrecht, en mede betrokken bij de werkzaamheden van het Freudenthal Instituut. Vele besprekingen over de vakantiecursussen van het Centrum waren een van de verschillende gelegenheden waarin hij professor Grootendorst leerde kennen en waarderen.

VOORTGANGSTOETSING IN 3 VMBO-TL

[Paul Ket]

Inleiding

Wiskundemethodes nodigen uit tot een stramien van ‘hoofdstukje–proefwerkje’, totdat het boek uit en het jaar afgelopen is. Eenmaal in het ritme kan het schooljaar eenvoudig doorlopen worden. De wiskundedocenten van de School voor Daltononderwijs Helen Parkhurst in Almere hebben in het schooljaar 2003/2004 in 3 vmbo-TL voortgangstoetsing ingevoerd. In dit artikel worden de achtergronden en de ervaringen hiermee besproken. Hierbij wordt ook aandacht besteed aan de statistische maat voor de kwaliteit van de toetsen.

Voortgangstoetsing

De opbouw van schoolboeken met per hoofdstuk één onderwerp nodigt uit tot het toetsen per hoofdstuk. We denken dan dat wanneer alle stukjes beheerst worden, het totaal ook onder de knie is. Voortgangstoetsing kijkt naar het einddoel, het eindexamen. In dat eindexamen komen alle onderwerpen door elkaar en in samenhang aan bod. De voortgangstoetsen die gemaakt worden doen dat dus ook. In het ideale plaatje maken leerlingen steeds een toets op examenniveau, waarbij ze gaandeweg steeds beter scoren. Op de eerste toets wordt slecht gescoord, op de tweede beter, op de laatste wordt op examenniveau gescoord. Hierdoor krijgen leerlingen direct zicht op hoe het met de kennisontwikkeling staat en of examenniveau al bereikt is[1]. Bij Helen Parkhurst is gekozen om te toetsen over de onderwezen stof en per toets een cijfer te geven. De cijfers op de voortgangstoets worden dus niet ‘vanzelf’ beter. Leerlingen krijgen hierdoor minder zicht op hun kennisontwikkeling, maar wel op hun kennisniveau.

Waarover gaat de toets?

De voortgangstoetsen gaan over de stof uit klas 1, 2 en de tot dan behandelde stof uit klas 3. De eerste toets gaat over de eerste twee hoofdstukken, de tweede over de eerste vier, enzovoorts. Welke onderwerpen aan de orde komen is de leerlingen tevoren niet bekend. Meestal komen de recente hoofdstukken terug, maar welke *oude* hoofdstukken is voor de leerlingen een verrassing. De keuze wordt gemaakt door de twee docenten die de toetsen samenstellen uit oude examenopgaven. Deze opgaven komen het dichtst bij wat er op het examen van de leerlingen gevraagd wordt. In één toets zitten vier à vijf opgaven met ongeveer 18 items. Leerlingen zijn dan een lesuur van 70 minuten bezig. Om duidelijk te maken dat de toets over alle behandelde hoofdstukken gaat, wordt bij elke opgave vermeld waar deze bij hoort.

Ter illustratie zijn in tabel 1 op pagina 280 per toets de hoofdstuknummers uit *Moderne wiskunde*, 7e editie, 3-vmbo-kgt opgenomen. De kolom onder ‘Hoofdstukken’ geeft aan welke er aan de orde zouden kunnen komen, de kolom ‘Gedaan’ geeft aan wat daadwerkelijk aan de orde is gekomen. Duidelijk is dat naarmate het jaar vordert, bepaalde hoofdstukken regelmatig terugkomen, terwijl andere slechts incidenteel terugkomen.

De hoofdstukken die verwijzen naar algemene wiskundige vaardigheden, zoals het rekenen met procenten, komen zelden als apart onderwerp aan de orde in eindexamenopgaven. Om ze wel terug te laten komen in de voortgangstoetsen worden hierover nieuwe opgaven gemaakt of worden bestaande opgaven aangepast.

Waarom voortgangstoetsing?

Voortgangstoetsing is ingevoerd om verschillende redenen. Allereerst blijkt bij het eindexamen steeds weer dat leerlingen zich slecht voorbereid voelen. Leerlingen ervaren een groot verschil tussen de opgaven van een proefwerk en van een examen. Gewone proefwerkopgaven zijn te klein, kennen minder leeswerk, hebben de te gebruiken informatie te expliciet opgenomen en gaan maar over één onderwerp.

Ten tweede ontbreekt er bij het stramien ‘hoofdstuk – proefwerk’ voor leerlingen een reden om een slechtgemaakt hoofdstuk nog een keer te leren. Bij de voortgangstoets kan elk behandeld hoofdstuk terugkomen en wordt opnieuw leren dus beloond.

Derde reden is het verminderen van de hoeveelheid toetsing. Enerzijds omdat toetsing teveel lessen kost, twaalf hoofdstukken in 3TL en zeven in 4TL kostten samen 19 lessen, tegen 10 voortgangstoetsen in 3TL en 4TL. Anderzijds omdat zoveel toetsen niet nodig is om het wiskundeniveau vast te stellen. Dat er met eindexamenopgaven gewerkt wordt, maakt het apart oefenen met oude examens overbodig. De leerlingen

hebben immers al heel veel examenopgaven gezien en uitgebreid geleerd hoe daar mee om te gaan. Laatste reden is dat ook docenten moeten leren om met examenopgaven en examen-nakijkvoorschriften om te gaan. Op een grote school als Helen Parkhurst zijn er elk jaar collega's die 4TL voor de eerste keer doen.

Hoe gaan leerlingen er mee om?

Voortgangstoetsing vraagt een andere voorbereiding dan een gewoon proefwerk vraagt. Dit is duidelijk te zien in de wijze waarop leerlingen de voortgangstoets benaderen. De eerste voortgangstoets wordt zonder al teveel problemen tegemoet gezien. Een toets over twee hoofdstukken, dat lukt wel. Na de toets is er uitgebreid commentaar op het type opgaven; de klachten die examenkandidaten normaal hebben, worden nu, begin derde klas, gehoord. De tweede voortgangstoets roept tevoren al vragen op: hoe bereid je een toets over vier hoofdstukken voor? Dit levert een aantal interessante klassengesprekken op. Hierbij wordt enerzijds stilgestaan bij de wijze van voorbereiden, maar ook bij de strategie die tijdens de toets gebruikt kan worden. Een inventarisatie van de wijze van voorbereiden van de leerlingen uit één klas gaf al een lijstje variërend van 'alle samenvattingen doorlezen', tot 'alle testbeelden maken, schrift doorbladeren en opnieuw nakijken'.
Vooral latere klassengesprekken gaan in op de wijze waarop leerlingen zo'n toets maken. De strategie van 'vooraan beginnen en doorploegen' blijkt voor een aantal leerlingen niet te werken. Met sommige onderwerpen hebben ze nou eenmaal minder affiniteit. Bij de tweede voortgangstoets blijken de leerlingen al een strategie te ontwikkelen die gericht is op het maken van de opgaven die punten opleveren, in plaats van de toets van voor naar achteren te maken. Na de vierde voortgangstoets komen de meeste vragen over het lezen en aanpakken van de opgaven zelf.
Het feit dat er minder toetsen zijn, heeft ook invloed op de werkhouding van de leerlingen in de klas. Het stramien 'hoofdstuk – proefwerk' gaf ook een ritme en stimuleerde leerlingen aan het werk te blijven. Dat ritme is verdwenen. De lessen lijken zich nu zonder markering in een eindeloze rij voort te bewegen. Het proefwerk gaf ook structuur aan het schooljaar. Het is nu aan de docent om een ritme zichtbaar te maken om eindeloze sleur te voorkomen.
De voorbereiding op de voortgangstoets vraagt vooral meer zelfdiscipline bij leerlingen. Gebrek aan inzet tijdens de lessen en bij het maken van huiswerk wordt 'afgestraft' met een slecht cijfer. Met maar twee cijfers per trimester en in klas 3 en 4 in totaal vijf trimesters, is het gewicht van de toets aan veel leerlingen snel duidelijk[2]. Vooral in onze Daltonschool, waarbij leerlingen zelf verantwoordelijk zijn voor hun planning (en het al dan niet achterlopen op de planning van de docent), lopen leerlingen nogal eens achter en zien zij zich geconfronteerd met bergen werk vlak voor de voortgangstoets. Enerzijds een probleem, anderzijds: beter in de derde klas dan vlak voor het CSE. Deze fout wordt niet herhaaldelijk door dezelfde leerling gemaakt.

Proces van de voortgangstoets

De productie van één voortgangstoets kost ongeveer 10 uur. Eerst worden de toetsen over het trimester verdeeld. De collega's met dezelfde klassen moeten vroegtijdig op de hoogte zijn van de periode waarin de toets afgenomen moet worden. Eén maand tevoren wordt gekeken welke oude examenopgaven geschikt zouden zijn voor de toets. Opgaven over de stof die de leerlingen nog niet kunnen, worden hierbij overgeslagen. Soms worden opgaven aangepast voor de derde klas. Daarna worden deze opgaven overgezet naar de toets en worden de bijlagen gemaakt. Als laatste worden bij de opgaven een nakijkvoorschrift en een puntentelling gemaakt. Eenmaal af, wordt de toets gecontroleerd door een docent die de toets niet samengesteld heeft. Na afname sturen de docenten per klas de scores per vraag in, op de wijze waarop dat bij het CSE ook dient te gebeuren. Wanneer van alle klassen de scores ontvangen zijn volgt een statistische analyse. Doel hiervan is om te bezien of onderdelen van de toets niet kloppen en om de omzetting van score naar cijfer te bepalen. Uiteindelijk ontvangen de docenten een formule waarmee ze voor hun leerlingen het cijfer kunnen bepalen. Daarna worden de cijfers aan de leerlingen meegedeeld.

Statistische verwerking

Door één van de docenten worden de scores van de toetsen verzameld en vervolgens met SPSS[3] verwerkt. Allereerst wordt gekeken naar de kwaliteit van de toets aan de hand van de betrouwbaarheid van de opgaven en het beoordelen van de betrouwbaarheid van de hele toets. Daarna volgt de normering.

Betrouwbaarheid van de opgaven

Een opgave in een toets heeft tot doel de kennis of vaardigheid van een leerling te meten. Goede leerlingen moeten de meeste opgaven goed maken, zwakke leerlingen alleen de eenvoudige opgaven. Of dat werkelijk zo is, kan gecontroleerd worden met de *item-totaal-correlatie* (it-c). Een opgave met een positieve it-c wordt goed gemaakt door leerlingen met een hoge toetsscore en slecht gemaakt door leerlingen met een lage toetsscore. Een negatieve it-c geeft aan dat de opgave *goed* gemaakt wordt door *zwakke* leerlingen en *fout* door *goede* leerlingen.
In tabel 2 is een voorbeelduitdraai opgenomen.
In de eerste kolom staan de opgaven aangegeven, daarna de correlatie tussen de score op die opgave en de totaalscore voor de toets. Hierbij is gebruik gemaakt van de gegevens van één toets die door 120 leerlingen gemaakt is. Uit de tabel wordt duidelijk dat opgave 5 (OP05) de hoogste correlatie met de toetsscore heeft. Leerlingen die deze opgave goed hebben, hebben over het algemeen een hoge

Toets	Hoofdstukken	Gedaan
1	1 – 2	1 – 2
2	1 – 4	1 – 4
3	1 – 7	1, 2, 3, 6, 7
4	1 – 10	1, 5, 8, 9, 10
5	1 – 12	4, 8, 10, 11, 12

Item	Item - totaal Correlatie
OP01	0,1345
OP02	0,1518
OP03	0,1773
OP04	0,4148
OP05	0,4589
OP06	0,2698
OP08	0,3724
OP09	0,3329
OP10	0,3636
OP11	0,3060
OP12	0,4466
OP13	0,3680
OP14	0,3668
OP15	0,2923
OP16	0,3974
OP17	0,2864
OP18	0,2782

Toetsnummer	Alpha
Toets 1	0,7306
Toets 2	0,6821
Toets 3	0,6822
Toets 4	0,7292
Toets 5	0,7135
Toets 6	0,7050

TABEL 1, 2 en 3

toetsscore, en omgekeerd. De laagste correlaties worden gevonden bij de opgaven 1, 2 en 3.

Betrouwbaarheid van de toets

Een voortgangstoets moet weergeven hoe het staat met de wiskundige kennis en vaardigheden van de leerlingen. Niet alleen moeten goede en zwakke leerlingen onderscheiden worden, ook goede en heel goede leerlingen moeten onderscheiden worden.
Een toets geeft als het ware de gelegenheid om alle leerlingen in gedachten 'op een rijtje' te zetten.
Om dit te doen wordt dan gebruik gemaakt van de toetsscore. Belangrijk wordt dan of de toetsscores hiervoor geschikt zijn. Als maat hiervoor wordt gebruik gemaakt van de coëfficiënt Alpha van Cronbach[4] (zie kader). Een toets met een hoge Alpha heet dan betrouwbaarder en dus geschikter te zijn dan een toets met een lage Alpha.

Cronbach's Alpha

$$\alpha_k = \frac{k}{k-1}\left[1 - \frac{\sum s^2_{item}}{s^2_{totaal}}\right]$$

Met

k: het aantal opgaven;

s^2_{item}: de variantie van één opgave (in de teller staat de som van de afzonderlijke varianties);

s^2_{totaal}: de variantie van de totaalscore.

In het reguliere onderwijs wordt een Alpha van 0,6 als acceptabel gezien. Een waarde van 0,8 is het maximum van wat praktisch haalbaar en wenselijk is[5,6] De Alpha neemt onder andere toe wanneer opgaven met een negatieve of lage it-c vervallen. Wanneer een opgave vervalt, verandert ook de totaalscore van de leerlingen op de toets. Stapsgewijs wordt dan ook gekeken naar een optimale combinatie van aantal opgaven, correlaties en Cronbach's Alpha. In tabel 3 is ter illustratie de betrouwbaarheid per toets van de voortgangstoetsen uit het schooljaar 2003/2004 opgenomen.

Bepaling voldoende / onvoldoende

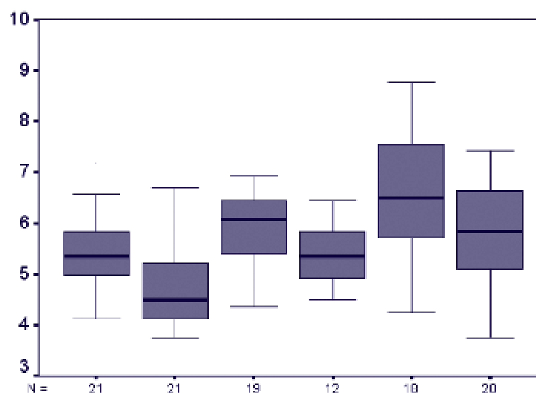
Wanneer duidelijk is dat de voortgangstoets als toets goed is, kan het cijfer bepaald worden. Theoretisch zijn er twee manieren om te bepalen wanneer een leerling een voldoende gehaald heeft, namelijk een absolute en een relatieve methode.
De absolute methode gaat uit van wat een leerling moet kunnen. Wanneer een leerling kan wat gevraagd wordt, bijvoorbeeld het foutloos maken van bepaalde opgaven, is er een voldoende behaald[7]. De scores op andere opgaven zijn hierbij niet meer van belang. Een voorbeeld van deze manier van toetsen is het autorijexamen. Hierbij mogen bepaalde fouten niet voorkomen om te kunnen slagen. Bij deze manier van normbepaling kunnen extremen voorkomen: iedereen een voldoende dan wel een onvoldoende is mogelijk.
De relatieve methode gaat uit van wat leerlingen kunnen. Omdat er altijd zwakke leerlingen zijn, zullen er een aantal een onvoldoende krijgen, er zullen ook een paar achten en negens zijn. De meeste cijfers worden dan gevonden rond de zes en de zeven. Statistisch gezien behoren de scores van een toets normaal verdeeld te zijn en zijn de cijfers dat dus ook.
In de schoolpraktijk wordt meestal gebruik gemaakt van een combinatie. De meeste docenten hebben wel een idee van wat een leerling moet kunnen (absoluut), maar passen de normering aan wanneer er naar verhouding veel onvoldoendes vallen (relatief). Bijvoorbeeld omdat een proefwerk onbedoeld moeilijk was en er teveel onvoldoendes zijn[8].
Bij het bepalen van de normering van de voortgangstoetsen wordt uitgegaan van de formule_

$$c = \frac{score}{43} \times 9 + 1$$

Wanneer deze formule meer dan de helft aan voldoendes oplevert, dan wordt deze formule gebruikt. Wanneer dit niet zo is, wordt de formule aangepast net zolang tot er voldoende leerlingen een voldoende cijfer hebben, door bijvoorbeeld te vermenigvuldigen met 8 en er vervolgens 2 bij op te tellen.
In tabel 4 zijn ter illustratie de vermenigvuldigings factoren en het laagste te behalen cijfer opgenomen van de eerste voortgangstoetsen uit het schooljaar 2003/2004.

Toets	Factor	Laagste cijfer
1	8	2
2	7,5	2,5
3	8,5	1,5
4	6,25	3,75
5	8,5	1,5
6	7,5	2,5

TABEL 4



FIGUUR 1

Ervaringen tot nu toe

Van leerlingen

Leerlingen hebben moeten wennen aan voortgangs-toetsen. In de tweede klas wordt namelijk gewoon per hoofdstuk getoetst, de voortgangstoets is dus in ieder geval 'anders'. En hij vraagt ook een andere manier van werken van de leerlingen. Allereerst vraagt de voortgangstoets in de voorbereiding meer zelfstandigheid en zelfdiscipline. Daarnaast moeten de leerlingen meer nadenken over wat er gevraagd wordt. In een proefwerk over één hoofdstuk is duidelijk waarover wat gevraagd wordt, bij een voortgangstoets moet dat eerst bedacht worden. Leerlingen maken de opgaven ook niet meer op volgorde, maar zijn hun eigen weg gaan volgen. Dus eerst de makkelijke opgaven, dan de opgaven met veel punten en als laatste de opgaven die moeilijk gevonden worden.
Dat de voortgangstoets over *alle* hoofdstukken gaat, heeft in de loop van het jaar effect gehad op de werkhouding. Dat er vlak voor een proefwerk pas gewerkt wordt is langzaam verdwenen. Allereerst omdat duidelijk was dat de inhoud van de toets en het hoofdstuk waar aan gewerkt wordt niet automatisch bij elkaar horen. Daarnaast hebben de leerlingen ondervonden dat de latere voortgangstoetsen zo groot zijn dat het onverstandig is om pas op het laatst aan het werk te gaan.

Van collega's

Ook voor collega's is de voortgangstoets een verandering. Daarnaast was de centrale verwerking nieuw. Omdat de normering pas vastgesteld kan worden wanneer van alle klassen scores zijn ingestuurd, moest er regelmatig op elkaar gewacht worden. De centrale verwerking maakt het ook nog mogelijk om resultaten van collega's en hun klassen te vergelijken. Dat gaf bij sommigen een onprettig gevoel. Pas nadat er door alle betrokkenen mee ingestemd was, zijn de resultaten van alle collega's aan elkaar gepresenteerd.
Dat bij de normbepaling uitgegaan wordt van de leerlingen van zes klassen, heeft er één keer toe geleid dat één klas in zijn geheel onvoldoende scoorde, terwijl een andere klas in zijn geheel voldoende scoorde. Over de samenstelling en de normering van de toetsen is daarna uitgebreid en emotioneel gesproken.

Bij de statistische analyse

De statistische analyse heeft een aantal zaken opgeleverd. Allereerst de overtuiging dat de analyse plaats moet vinden met *alle* betrokken klassen.
Het is aantrekkelijk om op basis van twee of drie klassen (van de zes), alvast een analyse te doen, zo nodig opgaven te verwijderen en de norm te bepalen. Echter, elke klas extra geeft weer ongeveer 25 leerlingen erbij die de analyse toch beïnvloeden. Wanneer een zéér zwakke klas toegevoegd wordt, heeft dit wel degelijk effect op de betrouwbaarheid van de opgaven, de toets en de normbepaling.
Het tweede dat opvalt, is dat er nogal wat 'reparatie' plaatsvindt door middel van het aanpassen van de normering. Dat gebeurt omdat er vanuit gegaan wordt, dat het hier om 'gewone' klassen gaat: niet slimmer of zwakker dan voorgaande jaren. Leerlingen uit deze klassen moeten dus over het algemeen een 6 of een 7 kunnen halen. Wanneer de toetscijfers dat in eerste instantie niet toelaten, dan ligt dat aan de toets en niet aan de leerlingen.
Dat er van zes klassen scores verzameld worden, maakt onderling vergelijken mogelijk. De gevonden verschillen tussen klassen zijn meestal statistisch van belang en niet toe te schrijven aan toeval. De cijfers van de ene klas op de ene toets verschillen dus wezenlijk van de cijfers van een andere klas[9].
In figuur 1 is een boxplot weergegeven van de cijfers van één voortgangstoets. Duidelijk zijn de verschillen tussen de tweede en de vijfde groep (klas). Geruststellend is de gedachte dat dit beeld per klas per toets wisselt.
Uit de analyses blijkt ook dat de leerlingen van de docenten die de toets samenstellen, geen voordeel hebben.

Bij het samenstellen

Bij het samenstellen zijn een aantal zaken naar voren gekomen. Allereerst het al eerder genoemde feit dat een aantal basisvaardigheden zoals het rekenen met procenten, schattend rekenen of het gebruik van de wetenschappelijke notatie in *Moderne wiskunde* een apart hoofdstuk krijgen, terwijl ze – soms terecht – niet zelfstandig terugkomen in examenopgaven. Een onderwerp dat bij gewoon toetsen dus apart getoetst wordt, komt in een voortgangstoets slechts impliciet terug.

Daarnaast blijkt dat bepaalde zelfstandige onderwerpen, zoals kijkmeetkunde, in examen-opgaven naar verhouding weinig terugkomen.
De keuze voor het gebruiken van examenopgaven blijkt grotendeels voor de kwaliteit van de voortgangstoetsen te zorgen. Uit de analyses blijkt steeds weer dat de zelf ontworpen opgaven de laagste it-c en een lage Alpha veroorzaken. Toetsen maken is dus een vak apart.
Dat eindexamenopgaven omvangrijk zijn, maakt dat er maar vier à vijf opgaven (met in totaal ongeveer 18 items) in één toets zitten. Het juist inschatten van de tijd die leerlingen hiervoor nodig hebben gaat nog wel eens mis. Dit wordt bij de statistische analyse en de normbepaling weer rechtgezet.
Het foutloos samenstellen van een toets, bijlagen en een nakijkvoorschrift blijkt geen eenvoudige opgave. In elke toets hebben fouten gezeten. Het meest voorkomend zijn incorrecte verwijzingen naar afbeeldingen of bijlagen. Fouten in zelfgemaakte opgaven komen ook naar verhouding veel voor.
'Even' een voortgangstoets maken is er dus niet bij.

Reflectie

Over het invoeren van voortgangstoetsing is het docententeam aan het einde van het schooljaar 2003-2004 enthousiast. Meer tijd voor wiskunde, minder tijd aan toetsing tijdens de les, minder nakijkwerk, een andere manier van leren bij de leerlingen, het klinkt allemaal ideaal. Er zijn echter ook kanttekeningen te maken. Wiskunde voor het vmbo gaat niet alleen over het maken van sommetjes en het doorgronden van theoretische wiskunde, maar gaat over het leren van kennis en vaardigheden die bij andere vakken of in het dagelijkse leven nodig zijn. Of voortgangstoetsing hierbij aansluit is nog maar de vraag[10].
Het doel dat leerlingen leren werken met eindexamenopgaven wordt gehaald: de leerlingen van de derde klas hebben in zes voortgangstoetsen per toets vijf eindexamenopgaven gezien en gemaakt. Ze hebben ook hun manier van maken van opgaven kunnen aanpassen naar een voor eindexamenopgaven geschikte methode.
Dat stof steeds weer terugkomt zou een aanleiding moeten zijn om oude hoofdstukken te herhalen. Zonder aanwijzingen van de docenten blijkt dit niet te gebeuren. Onze 3TL-leerlingen hebben nog niet de zelfsturing die hiervoor nodig is. Dat de voortgangstoetsen belangrijk zijn, is leerlingen duidelijk. Per trimester maar twee cijfers zorgt wel voor een serieuze benadering van de toetsen.
Door de voortgangstoetsen is wel de hoeveelheid toetsing en daarmee het nakijkwerk verminderd.
Al met al zien de betrokken docenten meer voordelen dan nadelen. Of zich dit ook uit in hogere eindexamencijfers moet het examen 2005 uitwijzen.

Noten

[1] Deze methode is breed ingevoerd aan de Universiteit Maastricht.
[2] Leerlingen kunnen per trimester van maximaal 2 vakken één toets herkansen. Gebrek aan inzet wordt besproken en opgenomen door de mentoren.
[3] SPSS: Statistical Package for the Social Sciences.
[4] Over Cronbach's Alpha is veel geschreven. Zie o.a.
- L.J. Cronbach: Essentials of psychological testing (5th ed.). New York: Harper & Row (1990).
Een prima handboek met daarin de meest gebruikte statistische begrippen is van
- A. Slotboom: Statistiek in woorden, een gebruikersvriendelijke beschrijving van de meest voorkomende statistische termen en technieken (2e dr. ed.). Groningen: Wolters-Noordhoff (1996).
[5] J. Cohen: Statistical power analysis for the behavioral sciences (2nd ed.). Hillsdale (N.J.): L. Erlbaum Associates (1988).
[6] Toetsen gaan vaak over meerdere onderwerpen (b.v. algebra, meetkunde, procenten); dat veroorzaakt een daling in de Alpha. Een toets langer maken zorgt daarentegen voor een hogere Alpha. Echter, een toets van 70 minuten is voor 3TL-leerlingen lang genoeg; daarna treedt zodanige vermoeidheid op dat de laatste opgaven altijd slecht gemaakt worden.
[7] Dit heet in onderwijskundig jargon 'Criterion Referenced Testing'. Zie hiervoor bijvoorbeeld:
- R.L. Ebel, D.A. Frisbie: Essentials of educational measurement (4th ed.). Englewood Cliffs (N.J.): Prentice-Hall (1986).
[8] Deze praktijk is door A.D. de Groot in 'Vijven en zessen' aan de kaak gesteld. Omdat er echter nog geen voor de praktijk werkbaar alternatief is, blijft deze bestaan.
[9] Een echt verschil maakt het mogelijk op basis van het cijfer aan een leerling te vertellen in welke klas hij/zij zit.
[10] Dezelfde vraag moet dan natuurlijk ook gesteld worden over de 'gewone' proefwerken.

Over de auteur

Paul Ket (e-mailadres: pket@helenpark.nl) is docent wiskunde en onderwijskundige. Hij geeft les aan de Daltonschool Helen Parkhurst in Almere.

1

De taal van de wiskunde

[Bert Zwaneveld]

Moeilijk maar handig

Wat mij met enige regelmaat bezighoudt, is de vraag waarom velen wiskunde moeilijk vinden. Veel gehoorde antwoorden zijn: wiskunde is saai, te abstract, weinig toepasbaar, veel gereken. Mijn (voorlopige) antwoord is dat de taal van de wiskunde, en dan met name de formuletaal, het belangrijkste struikelblok is: formules zijn inderdaad abstract; die taal een beetje onder de knie krijgen kost tijd en moeite en dat is saai; die taal gebruiken is een soort rekenen en rekenen is toch al niet zo'n sterk punt, bovendien kunnen apparaten dat veel beter en wordt het rekenen in de praktijk ook vrijwel altijd aan apparaten overgelaten. Over de meetkundetaal heb ik het hier dus niet.

De taal van de wiskunde bestaat nog niet zo lang, laten we zeggen 600 jaar. Op de totale menselijke geschiedenis een minieme tijd, ook als we bedenken dat er zeker 3000 jaar geleden al wiskunde bedreven werd. De ontwikkeling van die taal heeft dus lang geduurd. Kennelijk hebben we het al die tijd zonder gekund, maar het was natuurlijk wel behelpen. En ja, die taal is inderdaad abstract - en ja, die taal leent zich uitstekend voor rekenen. Maar die taal is nu eenmaal wel de belangrijkste verschijningsvorm van de wiskunde, ook bij toepassingen van welke aard dan ook. Duidelijk maken wat er bijvoorbeeld achter een eenvoudige rekenspelletje zit, is zonder die taal niet goed voorstelbaar. Een voorbeeldje van dit laatste: neem willekeurig vier opeenvolgende natuurlijke getallen, trek van het product van de grootste twee het product van de kleinste twee af. De ogenschijnlijk snelle rekenaar rekent dit uit door de vier getallen bij elkaar op te tellen:

$124 \cdot 123 - 122 \cdot 121 = 124 + 123 + 122 + 121 = 490$.

Wiskundetaal in wiskundeonderwijs

Globaal gesproken is er met het onderwijs in de wiskundetaal de laatste 50 jaar als volgt omgegaan. Eerst werd de taal van de wiskunde geleerd door de regels ervan te onderwijzen en die te laten oefenen: manipuleren met formules en het oplossen van vergelijkingen. Er was weinig aandacht voor de betekenis en de reikwijdte van die regels; toepassen gebeurde bij andere vakken. En verreweg de meeste mensen vergaten die regels vanaf het moment dat ze ze niet meer gebruikten. Daarna kwam er vooral onder invloed van het realistisch wiskundeonderwijs wél aandacht voor de betekenis en toepasbaarheid. Vanuit de didactiek van de wiskunde kwamen er steeds meer aanwijzingen hoe abstracte begrippen onderwezen kunnen worden. Van Hiele gaf aan welke fasering er in leerprocessen te onderscheiden is, wat leidde tot zijn niveautheorie. Al deze inzichten hebben op de een of andere manier een weg naar ons wiskundeonderwijs gevonden. Dat is onder andere via de schoolboeken gebeurd. Een gevolg was dat er minder tijd voor het oefenen van de wiskundetaal was. Daar kwam bij dat steeds meer leerlingen het algemeen vormend onderwijs, en dus ook wiskunde, gingen volgen. Gezien onze grotere vakdidactische kennis zou je verwachten dat het onderwijs in de wiskundetaal alleen maar verbeterd is. Maar inmiddels lijkt het erop dat met elke leerplanwijziging de aandacht voor de wiskundetaal alleen maar verder afneemt. Daarbij speelt de acceptatie van de (grafische) rekenmachine, ook bij de eindexamens, een niet onbelangrijke rol. Er zijn mensen, met name in het wiskundeonderwijs op hbo en universiteit, die vrezen dat de wiskundetaal volledig aan het verdwijnen is.

Voorstel

Dat de taal van de wiskunde moeilijk is hoef ik hier niet te betogen. Lees recente artikelen in *Euclides* van Metha Kamminga, Harm Jan Smid en mijzelf over de algebra er maar op na. Toch moet er wat gebeuren en misschien moeten we wel naar wat radicalere oplossingen toe. Ik ga uit van de volgende visie op de wiskundetaal: in het voortgezet onderwijs gaat het over uitdrukkingen die een al dan niet concrete *betekenis* hebben en die met behulp van vaste *regels* gemanipuleerd worden. Op het hoogste Van-Hiele-niveau betekent de uitdrukking $y = ax + b$ een geheel van samenhangende eigenschappen; denk aan functie(voorschrift), grafiek, rechte lijn, helling, rol parameters a en b, enzovoorts. En ik neem verder aan dat de betekenis van een uitdrukking beter beklijft dan de bijbehorende regels. Ik bepleit dan de volgende differentiatie:

Niet alle leerlingen hoeven die taal meer te leren, maar de leerlingen die het wel moeten, beginnen er meteen mee en doen dat degelijk.

Dit laatste betekent misschien ook wel meer oefenen. Een taal leren gaat immers op jeugdige leeftijd beter en moet ook goed gepraktiseerd worden. Om de gedachten te bepalen: leerlingen van vmbo hoeven de taal niet te leren, en van havo/vwo-onderbouw wel - zonder overigens in de dressuur van vóór 1968 te vervallen. Over hoe erg of goed dat is, gaat een volgende stukje.

Over de auteur

Bert Zwaneveld (e-mailadres: Bert.Zwaneveld@ou.nl) is hoogleraar 'professionalisering van de leraar, in het bijzonder in het onderwijs in de wiskunde en de informatica' aan de Open Universiteit Nederland. Hij was wiskundeleraar en onder andere redactievoorzitter en hoofdredacteur van Euclides.

NIET TERUG NAAR AF

[Peter Kop]

Aanleiding

Enigszins verward ging ik na de laatste studiedag van de NVvW naar huis. De plenaire lezing van Jan van de Craats had zijn uitwerking niet gemist.
Op de eerste plaats was daar een pleidooi om bij wiskunde-B weer bijna uitsluitend te gaan oefenen met rijtjes sommen waarin basisvaardigheden ingeoefend zouden worden: haakjes wegwerken, merkwaardige producten, kwadraatafsplitsen, rekenen met wortels en breuken, en vergelijkingen en ongelijkheden oplossen.
Op de tweede plaats meende de spreker te moeten afrekenen met didactische 'mythen' als: wiskundeonderwijs moet het denken bevorderen, moet doen aan problem solving, moet gebruik maken van contexten en moet met begrip en dus zonder rijtjes gewerkt worden. Zie voor een samenvatting van zijn voordracht *www.nvvw.nl/studiedag-2004/BaWiScreen.pdf*, en voor voorbeelden van de opgaven *www.science.uva.nl/~craats*.
Is dit weer een moment in de geschiedenis dat we na een periode waarin vooral begrip en inzicht de boventoon voerden, een beweging terug krijgen met de nadruk op drills en skills?
En wat moet ik, als docent wiskunde in het voortgezet onderwijs, met zo'n afrekening met 'onze' didactische uitgangspunten?
Net zoals Jan van de Craats zal ik me in mijn reactie beperken tot wiskunde-B.

De aansluiting VO-WO

Enige jaren geleden liep ik ruim een jaar rond op een technische universiteit bij de faculteit 'Techniek en Maatschappij' waarin ik o.a. de (werk)colleges Calculus voor studenten elektrotechniek en bouwkunde volgde en deze besprak met de docenten. De TU wilde zich voorbereiden op de komst van de eerste nieuwe tweedefaseleerlingen.
Ik was verbaasd over het feit dat de inhoud van Calculus in 25 jaar nauwelijks veranderd was. Het gebruik van een Amerikaans boek[1] dat de traditionele weg bewandelde, kan hieraan bijgedragen hebben. Ondanks het feit dat in het boek het gebruik van de grafische rekenmachine werd gestimuleerd, werd er nauwelijks gebruik gemaakt van de grafische rekenmachine. In eerste instantie was het zelfs niet toegestaan deze tijdens het tentamen te gebruiken. Later mocht dit wel, maar werd het gebruik ervan eerder tegengewerkt dan gestimuleerd. Opmerkelijk was verder dat iedere student de beschikking had over een laptop met computeralgebra. Daarin werd onderwijs gegeven maar tijdens de wiskundecolleges werd er geen enkele aandacht aan geschonken.
Het doel van het wiskundeonderwijs zoals dat op de TU verwoord werd, is eigenlijk hetzelfde als datgene wat Jan van de Craats in het voorwoord van zijn boek[2] vertelt, namelijk het verwerven van 'wiskunde als taal' om technische boeken en problemen te kunnen bestuderen en op te lossen. Over de weg naar dit doel verschillen Jan en ik van inzicht. Jan kiest voor de degelijke weg uit de 'goede oude tijd'; ik kies voor het verbeteren van de ingeslagen weg met behoud van de hiervoor genoemde didactische 'mythen'.

Theorie en ervaringen

Uit allerlei onderzoek blijkt dat kennis opgedaan in de ene situatie moeilijk toe te passen is in een andere situatie[3] - zeker als deze kennis geïsoleerd aangeleerd wordt, zoals vroeger gebeurde met de vele rijtjes sommen. Bekend zijn de talloze voorbeelden waarin leerlingen de geoefende opgaven uit het ene hoofdstuk niet meer in een volgend hoofdstuk konden gebruiken. In de natuurkunde konden ze niets met vergelijkingen, die ze bij wiskunde wel konden oplossen. En buiten school werd deze kennis al helemaal niet meer gebruikt. Het blijkt dat zelf experimenteren in vele verschillende situaties belangrijk is om te leren. Leerlingen kunnen dan zelf abstraheren, expliciteren en reflecteren. De docent zal situaties moeten scheppen die deze activiteiten uitlokken. Hierna zal expliciet aandacht geschonken moeten worden aan generalisaties om enige transfer van het geleerde naar nieuwe situaties mogelijk te maken. Hoewel hierbij de opmerking gemaakt moet worden dat sommigen menen dat iedere kennis altijd gebonden is aan de context waarin deze geleerd is (zie hiervoor [4]).

Dat eindeloos oefenen van algebrarijtjes niet tot het gewenste resultaat leidt, liet R. Wenger zien[5]. Terwijl de studenten wel de algebraïsche problemen in de afzonderlijke hoofdstukken konden oplossen, waren ze niet in staat om het volgende probleem op te lossen:

Druk v uit in u: $v\sqrt{u}=1+2v\sqrt{1+u}$.
De meeste studenten begonnen links en rechts te kwadrateren.
Dit voorbeeld laat bovendien zien dat ook strategiebepaling een belangrijk onderdeel is bij het oplossen van vergelijkingen. Volgens Jan van de Craats kan dit probleemoplossen achterwege blijven; zie zijn lijstje met didactische mythen.

In het examen vwo wiskunde-B12 van 2003 is de volgende rij gegeven:

$$u_n=\frac{1+u_{n-1}}{1-u_{n-1}} \text{ met } u_0=a$$

Gevraagd wordt om langs algebraïsche weg aan te tonen dat $u_2=-\frac{1}{a}$ is. Daarna wordt gevraagd om aan te tonen dat $u_4=a$. Ook hier speelt strategie een belangrijke rol en is er dus sprake van problem solving. Leerlingen zullen niet na het eindeloos oefenen van rijtjes sommen uit zichzelf zulke strategieën ontwikkelen. Daar zal tijdens de lessen aandacht aan besteed moeten worden. Ik vrees dat Jan van de Craats deze problemen bij het ontwikkelen van zijn boek onderschat heeft.

Nog een voorbeeld van een resultaat van 'drillen' is uit 1984 uit eigen lespraktijk:
Op enig moment komt een leerling uit op de vergelijking $(2x - 3)(x + 3)=0$. De leerling ziet haakjes en werkt ze uit (dat doe je immers meestal met haakjes):
$2x^2 + 3x - 9 = 0$
Dit is een tweedegraadsvergelijking dus ontbinden of abc-formule; eerst even delen door 2:
$x^2 + 1{,}5x - 4{,}5 = 0$.
Nu ontbinden: $(x - 1{,}5)(x + 3) = 0$, dus de oplossingen zijn $x = 1{,}5$ en $x = -3$.

Met deze voorbeelden heb ik willen duidelijk maken dat geïsoleerd oefenen leidt tot beperkt toepasbare kennis en dat bij het algebraïsch werken ook aspecten van problem solving een belangrijke rol spelen. Vanaf het begin zullen zowel transfer als problem solving dus aan bod moeten komen, geïntegreerd in het wiskundeonderwijs van alledag.

Wat doen we op dit moment?

Op dit moment proberen we[6] de grafische rekenmachine een realistische rol te geven en denken we na over een eventuele rol voor computeralgebra. Ook ik heb in het begin meegedaan aan pogingen om zoveel mogelijk middelbare-school-wiskunde met het apparaat te doen. Die tijd is voorbij. We zoeken nu naar welke handmatige algebra nog nodig is. Maar het ontkennen van de technische mogelijkheden (computeralgebra) is niet zinnig en dus zullen we daarop moeten inspelen.
We proberen in het voortgezet onderwijs te werken met relevante contexten. Jan van de Craats heeft wel gelijk met zijn bezwaar dat er vele irrelevante onzinverhaaltjes circuleren. Maar de wél relevante contexten moeten leiden tot zinvolle leeractiviteiten die bij wiskunde horen. Naast handmatige algebraïsche vaardigheden zijn dat bijvoorbeeld: voorspellen, werken met modellen, afwegen van strategieën, schatten, interpreteren, werken met verschillende representaties, testen van resultaten, kritisch (terug)kijken, generaliseren, waarderen, zelfvertrouwen opbouwen.
Een paar voorbeelden van relevante contexten:
a. Het Gewichtig probleem[7]. Een historische context levert het volgende model op:

$$afstand=\sqrt{a^2-(1-x)^2}+1-\sqrt{x^2+a^2-(1-x)^2}$$

De maximale afstand moet nu gezocht worden. Natuurlijk, voor $a = 0{,}4$ kun je de grafische rekenmachine gebruiken. Maar hoe deed men dat destijds zonder grafische rekenmachine? De leerlingen wordt gevraagd ook die berekening uit te voeren. Sinds dit jaar knoop ik de opdracht er aan vast om dit ook met behulp van TI-interactive (een programma met computeralgebra) op te lossen. De handmatige algebraïsche vaardigheden komen hier op een natuurlijke wijze naar voren.
b. Martin Kindt geeft in zijn boek 'Oefeningen in Algebra' mooie voorbeelden van zinnige algebraïsche problemen[8].
c. De algebrawerkgroep van de NVvW maakte een opzet voor een digitale toetsbank met voorbeelden voor klas 3/4 havo/vwo[9].
d. Het themanummer van Euclides jaargang 78 (januari 2003) gaat over onderzoeksvaardigheden en geïntegreerd wiskundeonderwijs, en geeft vele fraaie voorbeelden.

Hoe nu verder?

Ondanks alle negatieve geluiden denk ik dat voor veel docenten geldt dat het ons de laatste jaren beter lukt in de Tweede fase. Met enthousiasme is hard gewerkt om er wat van te maken. De terugkeer naar voornamelijk eindeloze rijtjes sommen is noch aanlokkelijk noch wenselijk.
Ook in het voortgezet onderwijs mag een breder beeld van wiskunde gepresenteerd worden dan 'rijtjes sommen maken'. Deze rijtjes zijn niet effectief om wiskunde mee te leren. Bovendien zullen velen deze vorm van wiskunde nauwelijks meer gebruiken. In interviews met studenten tijdens mijn TU-jaar gaven ouderejaarsstudenten aan dat ze wel het logische en abstracte denken en werken (dat ze voornamelijk aan de wiskunde toeschreven) gebruikten, maar nauwelijks de algebraïsche vaardigheden waarin ze getraind werden. Ook mensen die werkzaam zijn in technische beroepen geven vaak aan dat ze niet zozeer de algebraïsche vaardigheden gebruiken dan wel de wijze van denken en werken.

De algebraïsche vaardigheden verdienen misschien wel meer aandacht dan ze de afgelopen jaren hebben gekregen. Zie hiervoor ook mijn opmerking met betrekking tot eerdere pogingen om zo veel mogelijk met de grafische rekenmachine te proberen.
Misschien zou er vanuit het hoger onderwijs ook meer pogingen gedaan moeten worden om

computeralgebra in de reguliere wiskundecolleges in te bouwen.
Bovendien zou veelvuldiger en gestructureerder overleg tussen voortgezet onderwijs en hoger onderwijs voor de nodige verbeteringen kunnen zorgen.

Er kan veel verbeterd worden, maar het lijkt mij een slechte zaak om paniekvoetbal te spelen en alle didactische uitgangspunten van de afgelopen jaren overboord te zetten. Dat zouden we niet moeten doen.

Noten

[1] R.A. Adams: Calculus. Ontario: Addison-Wesley, 1999, 4th edition.
[2] Jan van de Craats, Rob Bosch: Basiswiskunde - een oefenboek voor havo, vwo, hbo en universiteit. Te vinden op www.science.uva.nl/~craats.
[3] Zie bijvoorbeeld de vele artikelen van Anne van Streun, en 'How People Learn' van Bransford, Brown, Cocking (Washington D.C.: National Academy Press, 1999); http://bob.nap.edu/readingroom/books/howpeople1/index.html.
[4] A. Watson (ed.): Situated Cognition and Learning of Mathematics. CMER/QED Books (1999).
[5] Alan Schoenfeld (ed.): Cognitive Science and Mathematics Education. Hillsdale NJ: Erlbaum (1987).
Dit voorbeeld wordt ook door Paul Drijvers genoemd in zijn proefschrift 'Learning algebra in a computer algebra environment'. Paul benadrukt het belang van 'symbol sense'.
[6] Ik gebruik 'we' omdat ik uit mijn contacten in o.a. de havo/vwo-werkgroep van de NVvW de indruk heb dat velen met mij in deze richting zoeken.
[7] Uit: Profi-team: Differentiaal- en Integraalrekening deel 3. Utrecht: Freudenthal Instituut.
(8) Martin Kindt: Oefeningen in Algebra; productief oefenen in algebra voor de onderbouw. Utrecht: Freudenthal Instituut.
[9] Zie www.nvvw.nl bij 'werkgroepen' onder Algebrawerkgroep.

Over de auteur

Peter Kop (e-mailadres: peterkop@worldonline.nl) is ruim 25 jaar docent in het voortgezet onderwijs, deelnemer aan HAWEX en Profi, lid van de algebrawerkgroep, hbo- en havo/vwo-werkgroep van de NVvW en redactielid van de Zebrareeks. Sinds enige jaren is hij vakdidacticus aan de universitaire lerarenopleiding in Leiden.

Aankondiging / Symposium XI van de Historische Kring Reken- en WiskundeOnderwijs (HKRWO)



KANSEN EN VERWACHTINGEN

Geschiedenis van Kansrekening en Statistiek in het Nederlandse onderwijs

Datum, plaats en tijd

Zaterdag 28 mei 2005
Hogeschool Domstad te Utrecht (Koningsbergerstraat 9)
Van 10:00 tot 16:00 uur

Programma

09:30–10:15 Ontvangst en koffie
10:15–10:30 Opening door Marjolein Kool (Hogeschool Domstad)
10:30–11:15 Ida Stamhuis (Vrije Universiteit, Amsterdam)
Statistiek en onderwijs in de negentiende eeuw
11:15–12:00 Gerard Alberts (CWI Amsterdam, Radboud Universiteit Nijmegen)
De opdringende statistiek
12:00–13:30 Lunch, tentoonstelling
Eenieder is uitgenodigd een poster op te hangen en/of iets te exposeren.
13:30–14:15 Fred Goffree (emeritus Universiteit van Amsterdam)
Kans voor het onderwijs: kansrekening en statistiek in het basisonderwijs in de jaren '70
14:15–15:00 Bert Zwaneveld (Open Universiteit)
Kansrekening en statistiek in het voortgezet onderwijs
15:00–15:15 Theepauze
15:15–16:00 Arthur Bakker (London Institute of Education)
De geschiedenis van de statistiek als inspiratiebron voor het ontwikkelen van lesmateriaal
16:00 Sluiting

Overige informatie

Deelname door overmaking van € 25,00 op giro 4657326 t.n.v. HKRWO te Amsterdam (koffie, thee en lunch inbegrepen).
Inlichtingen: HKRWO, Dorpsstraat 26-A, 6582 AN Heumen; tel.: 024-3777928, e-mail: *d.beckers@inter.nl.net*.
Het HKRWO-symposium XI wordt mede mogelijk gemaakt door financiële steun van NWO, NVvW en NVORWO. Verder is er ondersteuning vanuit het Freudenthal Instituut.

DE BOZE STIEFMOEDER VAN HET PAARD

[Victor Thomasse]

‘Het is allemaal dáár, in de kosmos’, zei Freek de Jonge eens, ‘je hoeft alleen maar in te pluggen.’ In de brugklas kom ik los en ben ik niet bang in het diepe te springen. Dus ik ga Freek achterna en start de improvisatie.

De avond ervoor heb ik bijlage vier gelezen: ‘Wat is een cirkel?’ van Joop van Dormolen en Abraham Arcavi (zie Euclides 76-5, februari 2001, p. 183). ‘Definities zijn vrijwel nooit startpunt voor het leren van een nieuw begrip. Veeleer het eindpunt ervan. Het is een samenvatting van leerervaringen waarin een nieuw begrip is ontwikkeld, onderzocht en toegepast in verschillende contexten.’ Er staan ook plaatjes bij het artikel waarin het begrip cirkel geïllustreerd wordt.

We zijn met de klas beland in paragraaf 1.5: *Cilinder en cirkel*. Met de plaatjes uit de bijlage nog in mijn achterhoofd besluit ik om *niet* met de definities van bladzijde 19 te beginnen. In plaats daarvan vertel ik een zielig sprookje van een hongerig paard, door een boze stiefmoeder met een ketting vastgemaakt aan een paaltje midden in de wei. Ik ben van de dierenbescherming en kijk vanuit mijn helikopter naar de wei. ‘Wat zie ik? Teken in je schrift.’
De cirkels worden getekend en men kan ook uitleggen waarom. De lengte van het touw noemen we de straal. ‘En dit? De omtrek, goed zo.’

De stiefmoeder pakt mij terug en uit kwaad-aardigheid maakt ze stiften vast aan de onderkant van de deuren van mijn huis. Ik doe de deur van het lokaal open en dicht. ‘Wat voor streep krijg ik nou op mijn dure parket?’ Dan verschijnen de cirkelbogen en ook deze kan men uitleggen.

Het verhaal wordt steeds wilder. Ik wil de stiefmoeder met mijn lasso vangen, maar ik mis en het touw valt op de grond. ‘Welke vormen kunnen zo ontstaan? En als ik de stiefmoeder wél weet te vangen?’ Ik bind haar ’s nachts vast op een schommel. Uit de reacties begrijp ik dat schattige kindjes van 12 jaar al vertrouwd zijn met het begrip SM, maar daar ga ik maar aan voorbij. In plaats daarvan plaats ik een sterretje op haar hoofd en vraag de leerlingen te tekenen wat ze nu zien in het donker. Weer cirkelbogen. ‘En als ik héééél hard duw? Een cirkel. Of een spiraal? Waarom? Wat is nu de straal? Wat is het middelpunt?’

De klas hangt aan mijn lippen maar voor Danny, met ADHD, wordt het te veel: hij is de rem kwijt en niet meer stil te krijgen. In het gesprek geeft hij met wat gêne aan dat hij hiervoor medicijnen slikt: ritalin. Dat is niets om je voor te schamen, zeg ik, en haal de tramadol uit mijn koffertje. Het is een opioïde, een verre neef van morfine. Dat vindt men wel interessant, een junkie als meester voor de klas. ‘Het is voor de chronische ontsteking van de spier onder aan mijn voet.’ Ik teken mijn platvoet op het bord en de gestrekte *plantair fascia*, het peesblad tussen mijn tenen en hiel. Daarnaast teken ik een gewone, holle voet. ‘Welke vorm heeft de spier nu? Teken eens in je schrift. En welke cirkel hoort daarbij? En wat is dan de diameter?’

Je hoeft alleen maar in te pluggen.

Over de auteur

Victor Thomasse (e-mailadres: v.thomasse@chello.nl) haalde zijn bevoegdheid Nederlands al in 1983, maar is daarna vooral in het bedrijfsleven actief geweest. Sinds ruim een jaar werkt hij weer in het onderwijs; hij heeft intussen de eerstegraads opleiding wiskunde afgerond. Momenteel volgt hij de lerarenopleiding natuurkunde.

De stelling van Markov

[Rob Bosch]

Tijdens een college statistiek kwam de volgende vraag aan de orde.

Van een aantal niet-negatieve getallen is het gemiddelde 10. Hoe groot kan de fractie getallen die minstens 50 zijn, maximaal zijn?

De grootste fractie krijgen we als alle getallen kleiner dan 50 zo klein mogelijk zijn; deze nemen we dus gelijk aan 0. Nemen we de rest van de getallen gelijk aan 50, dan vinden we voor de gevraagde fractie p:
$50p + 0 \cdot (1-p) = 50p = 10$
en dus is (zie ook figuur 1A):
$$p = \frac{10}{50} = 0{,}2$$
Nemen we in de vraag 100 in plaats van 50, dan vinden we op eenzelfde wijze een fractie (zie ook figuur 1B):
$$p = \frac{10}{100} = 0{,}1$$
In een verzameling niet-negatieve getallen met een gemiddelde μ geldt voor de fractie p van getallen die groter zijn dan of gelijk zijn aan $a > 0$ (zie ook figuur 1C):
$$p \leq \frac{\mu}{a}$$
Dit is allemaal heel eenvoudig, maar het is wel verrassend dat we de gevraagde fractie zo simpel kunnen bepalen.

In de kansrekening staat het bovenstaande resultaat bekend als de stelling van Markov.



A.A. Markov (1856-1922)

Stelling 1 (Markov). Zij $X \geq 0$ een discrete kansvariabele met verwachtingswaarde $E(X)$. Voor iedere $a > 0$ geldt
$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

Bewijs:
$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_x x \cdot P(X = x) \\ &= \sum_{x<a} x \cdot P(X = x) + \sum_{x \geq a} x \cdot P(X = x) \\ &\geq \sum_{x \geq a} a \cdot P(X = x) \\ &= a \cdot \sum_{x \geq a} P(X = x) \\ &= a \cdot P(X \geq a) \end{aligned}$$
en dus is $P(x \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$.

De variantie is, zoals bekend, een maat voor de spreiding van getallen rond het gemiddelde. De variantie VAR van een verzameling getallen is gedefinieerd als
$$VAR = \frac{\sum_x (x-\mu)^2}{n}$$
waarin n het aantal getallen is en μ het gemiddelde. De standaardafwijking σ van de waarnemingen is de wortel uit de variantie: $\sigma = \sqrt{VAR}$.

Een variant op de eerste vraag is de volgende.

Het gemiddelde van een verzameling getallen is 10 en de variantie is gelijk aan 25 (de standaardafwijking is dus 5). Hoe groot kan de fractie getallen die minstens 15 van het gemiddelde afliggen maximaal zijn? Zie figuur 2.

De grootste fractie krijgen we als we de getallen op een afstand van minstens 15 zo dicht mogelijk bij het gemiddelde kiezen. We nemen voor deze getallen dus -5 of 25. Als de fractie van deze getallen p is, dan is de bijdrage aan de variantie gelijk aan $15^2 \cdot p$.
Er geldt nu $VAR \geq 15^2 \cdot p$ en dus
$$p \leq \frac{VAR}{15^2} = \frac{25}{225} \approx 0{,}11$$

In het algemeen geldt voor de fractie waarnemingen p die minstens $a > 0$ van het gemiddelde afliggen

$$p \leq \frac{VAR}{a^2}$$

Weer heel eenvoudig, maar ook verrassend dat we de maximale fractie zo simpel kunnen berekenen.

In de kansrekening kennen we bovenstaand resultaat als de stelling van Chebychev.



P.L. Chebychev (1821-1894)

Stelling 2 (Chebychev). Zij X een discrete kansvariabele met verwachtingswaarde $E(X)$.

Voor iedere $a > 0$ geldt $P\left(|X - E(X)| \geq a\right) \leq \dfrac{VAR}{a^2}$.

Bewijs: Zij Y de kansvariabele $Y = (X - E(X))^2$. Daar $Y \geq 0$ is mogen we de vorige eenvoudige stelling van Markov toepassen. Die geeft

$$P\left((X - E(X))^2 \geq a^2\right) \leq \frac{E\left((X - E(X))^2\right)}{a^2}$$

anders gezegd

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{E\left((X - E(X))^2\right)}{a^2}$$

en dus per definitie

$$P\left(|X - E(X)| \geq a\right) \leq \frac{VAR}{a^2}$$

Als we voor $a = k\sigma$ nemen, dan kunnen we het bovenstaande resultaat schrijven als

$$P\left(|X - E(X)| \geq k\sigma\right) \leq \frac{VAR}{k^2\sigma^2} = \frac{1}{k^2}$$

Als we de kansverdeling kennen, bijvoorbeeld de normale verdeling, dan kunnen we de gevraagde fracties exact berekenen. Indien de kansverdeling onbekend is, dan geven de stellingen een bovengrens voor die fracties.

De bovenstaande stellingen gelden overigens ook voor continue kansvariabelen. In de bewijsjes hoeven we dan slechts de sommen door integralen van de kansdichtheidsfuncties te vervangen.

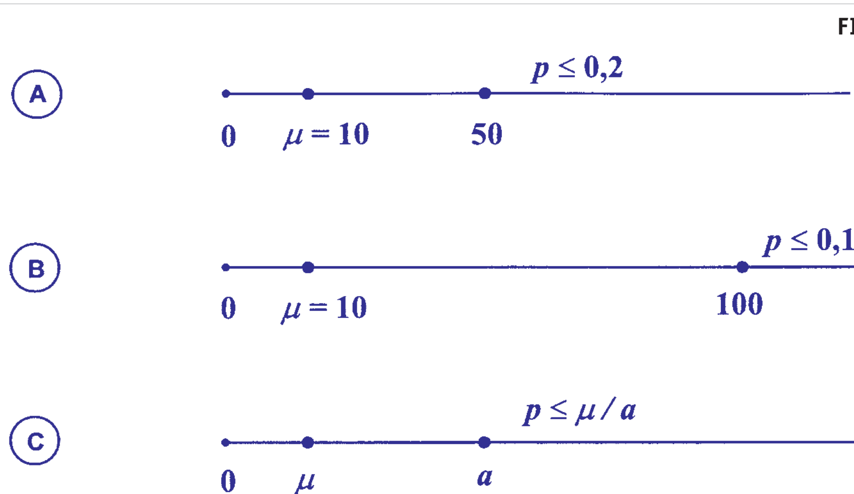
Literatuur

G.R. Grimmet, D.R. Stirzaker: Probability and Random Processes. Oxford: Clarendon Press, 1992.

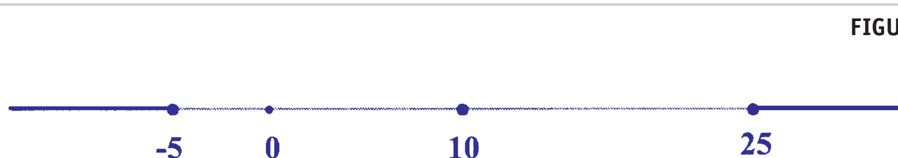
Over de auteur

Rob Bosch (e-mailadres: r.bosch2@mindef.nl) is redacteur van Euclides en universitair hoofddocent aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda.

FIGUUR 1



FIGUUR 2



LAAT JE LEERLINGEN ZELF LESGEVEN

Kan wiskunde leuker en interessanter zijn? Mijn project in het kader van actief leren.

[Teresa Hallmann]

Inleiding

Ik werk op het Gymnasium OSG Piter Jelles in Leeuwarden. Sinds drie jaar ben ik bezig met een project om leerlingen les te laten geven. Wat is het doel van dit project? Zeker géén lastenverlichting voor de docent. Het is eerder andersom, ik moet juist méér tijd aan mijn werk besteden. Mijn experiment is vooral gericht op de ontwikkeling van de leerling. Ik wil de leerlingen meer bij de lessen betrekken. Ik wil dat ze actiever zijn, dat ze wiskunde anders zien. De wiskundeles kan ook anders zijn dan een gewone, saaie les met werken uit boeken en luisteren naar de leraar. Dus het motto van die lessen is: actief leren.

Achtergrond bij het experiment

Ik ben twee jaar geleden met dit experiment begonnen, eigenlijk in klas 5 wiskunde-A1. Na de eerste toetsweek schrok ik van de zeer slechte resultaten in deze klas. De helft van de leerlingen (dat waren trouwens zwakke leerlingen) was helemaal niet geïnteresseerd in wiskunde, en was niet gemotiveerd om te leren. Mijn eerste idee was om leerlingen aan hun eigen klas les te laten geven; op die manier hoopte ik dat ze betere resultaten voor de toetsen zouden halen.
Eigenlijk mocht iedereen meedoen, zowel de zwakke als de goede leerlingen. De bedoeling was namelijk dat de leerlingen door de voorbereidingen van de lessen de stof beter leerden beheersen en op die manier hun cijfers zouden kunnen ophalen. Zeven leerlingen hebben zodoende in de 2e en 3e periode samen 14 lessen gegeven.
Positieve resultaten van het zelf lesgeven:
a. Iedereen die dat deed, werkte vooruit en kon zich daardoor beter op de toets voorbereiden.
b. De leerlingen moesten twee lessen (dus ongeveer 12 à 13 opgaven) heel goed voorbereiden en de betreffende stof goed beheersen. Ze hadden ter beschikking de uitgebreide uitwerkingen en genoeg tijd om de moeilijke vragen met me te bespreken.
c. Het was zeer leerzaam voor de leerlingen dat zij een uitleg vaak op verschillende manieren moesten geven.
d. De meeste deelnemers kregen hogere cijfers voor de toetsen.
e. Iedereen heeft meer zelfvertrouwen gekregen.

Experiment op basisschool

De goede resultaten en het enthousiasme van de leerlingen brachten me op een ander idee, namelijk om een brug te slaan tussen de basisschool en het vwo. Mijn nieuwe plan was, de leerlingen uit de eerste klassen van ons gymnasium les te laten geven aan groep 8 van de basisscholen waar zij zelf op hebben gezeten. Het doel was, de leerlingen van groep 8 vertrouwd te maken met de wiskunde en ze tegelijk een beetje voor te bereiden voor het voortgezet onderwijs. Voor deze lessen heb ik in principe de goede leerlingen gekozen, leerlingen die bij geen enkel vak problemen hadden, want af en toe moesten ze eigen lessen missen. Ze gaven een les aan twee verschillende groepen 8.
Onze leerlingen waren helemaal niet bang, ik was zenuwachtiger dan zij. Alle leerlingen uit groep 8 deden mee, ze waren echt geïnteresseerd en vonden het heel leuk, anders dan een les van de meester.
Na de les kregen onze leerlingen applaus van de basisschoolleerlingen. Eline, Marjolijn en Marjolein gaven in totaal ongeveer 10 lessen aan dezelfde groepen leerlingen van twee basisscholen: één in Leeuwarden (O.B.S. Het Palet) en één in Grou (O.B.S. Grou). Deze drie meisjes, inmiddels derdeklassers,


Eline de Graaf

doen dat overigens nu al weer voor het derde achtereenvolgende jaar!

Beschrijving van een gegeven les

Voor alle lessen hebben we Getal en Ruimte voor klas 1 gebruikt om lesstof te zoeken; deze werd vervolgens verwerkt in een les. Elke keer heb ik van tevoren alle opdrachten met de leerlingen besproken om zeker te zijn dat ze de stof goed beheersten. De kopieën van de gekozen opgaven werden aan het begin van de les uitgedeeld. Daarna volgde een uitleg. De kinderen die het snapten gingen direct aan het werk. Degenen die problemen met de opdrachten hadden, kregen apart uitleg. Tijdens het maken van de opdrachten mochten de kinderen ook vragen stellen. Die werden dan beantwoord. Elke les duurde 90 minuten.

Uitbreiding van het project

Verder liet ik vorig jaar ook lesgeven door de leerlingen uit de 4e, 5e en 6e klas aan onze eigen 1e klassen. Drie jongens gaven die lessen tijdens hun tussenuren. Op die manier misten ze geen eigen lessen. Ik probeerde voor die leerlingen altijd de stof van de lessen van tevoren door te geven (of het boek te lenen of de kopieën te maken) en ook te bespreken. Ze hadden natuurlijk geen problemen met die opdrachten van de 1e klas, maar ik gaf altijd tips over wat er heel belangrijk was, waaraan ze veel aandacht moesten schenken. Ik was altijd in het lokaal aanwezig wanneer de jongens lesgaven. Ik hielp hun met uitleg bij moeilijke opdrachten. Na de lessen bespraken we wat er goed en niet goed ging.

Reacties van leerlingen

Eersteklassers Liselotte Rambonnet en Floor van Schralen vinden het wel grappig om elke woensdag les te krijgen van een leerling in plaats van de lerares: ‘Hij legt het anders uit dan je gewend bent, maar ook duidelijk. De les is anders, leuk en ook goed.’
‘Ik vind wiskunde niet zo leuk, met name het huiswerk. De lessen daarentegen vind ik wel leuker.’

De leerlingen die lesgeven vinden dat fantastisch. Eline de Graaf schrijft als tweedeklasser in haar verslag:
‘Een tijdje geleden heb ik samen met Marjolijn Bosma en Marjolein Admiraal wiskundeles gegeven in de groep 8 van twee basisscholen. We hebben een les gegeven over het optellen, aftrekken en vermenigvuldigen van negatieve getallen. In Grou was het verschil in niveau erg groot, verschillend van lwoo tot gymnasium. Het was voor mij erg lastig om het voor iedereen duidelijk te krijgen, maar het toch ook leuk te houden voor de “slimmeriken”. Alhoewel... dit maakte het ook wel een uitdaging! Het was een geslaagde les. De les op het Palet vond ik persoonlijk veel leuker. Het was een groep met 16 kinderen. Ze waren druk, maar letten wel goed op. De les op het Palet was heel goed en ook bijzonder gezellig. Ik moet eerlijk bekennen dat ik wiskunde maar een saai vak vind, maar om zo’n les te geven die leerlingen ook nog leuk vinden, dat is echt super! Van deze lessen heb ik geleerd dat niveauverschil tussen leerlingen soms lastig, maar meestal ook uitdagend is voor de docent. Ook heb ik geleerd dat een kleine groep makkelijker is om les te geven dan een grote groep. Het belangrijkste wat ik heb geleerd, is dat negatieve en positieve getallen eigenlijk niet zo ingewikkeld zijn als ik eerst dacht!’

Marjolijn Bosma schrijft: ‘Het is heel leuk om les te geven, echt een leuk gevoel krijg ik daar bij.

Mevrouw Hallmann heeft er goed aan gedaan dit project te beginnen, want van alle kanten wordt er razend enthousiast gereageerd.'

En Marjolein Admiraal meldt: 'Als het aan mij ligt, wil ik dit mijn hele schoolperiode wel blijven doen. En ik denk dat daarna ook andere kinderen wel les willen geven.'

Verslagen van oudere leerlingen

Maarten van den Berg (5e klas) gaf vaak les aan klas 1d. Hij schrijft: 'Ik doe al enkele weken mee aan het experiment van mevrouw Hallmann. In de eerste lessen observeerde ik alleen maar, en elke les deed ik een stapje meer. Mevrouw Hallmann en ik delen de uitleg en dan gaan ze aan het werk. Als er tijdens het werken vragen zijn, dan probeer ik die te beantwoorden. Eventueel doe ik ook nog een som voor.
Het is voor mij niet zo moeilijk om het te snappen, maar het uitleggen is een tweede; vaak is de uitleg van het boek wel redelijk, maar meestal moet je het even verhelderen.
De grootste uitdaging tot nu toe was het uitleggen van het binaire stelsel; het was meteen al te zien dat de "alfa's" daar erg mee in de knoop zaten. Gelukkig konden we met vereende krachten het bijna iedereen doen snappen.'

Sjoerd van Belkum (6e klas) gaf bijna elke woensdag les aan klas 1c. In het begin vond hij dat moeilijk.
1e les: 'Tja, daar sta je dan. Eerste wiskundeles die ik zal geven. Het idee is zo mooi, spreek hun taal, steel hun hart, leer ze eerst wiskunde en dan wiskunde liefhebben, zoals ík nooit de voor sommigen vanzelfsprekende afkeer voor wiskunde heb gehad. Maar daar sta je dan, natuurlijk niet onvoorbereid, en dan blijkt het wel lastiger te zijn dan het lijkt. Probeer maar eens de klas in de gaten te houden, om er op te letten dat ze jou wel in de gaten houden, én te bedenken hoe je het volgende zal uitleggen. Deze kinderen denken nog behoorlijk anders dan ik, veel minder abstract, en alles wat voor mij vanzelfsprekend is, is voor hun het meest onlogische wat ze kunnen bedenken. Dus leef je in en leef je uit. Maar het ging goed, de kinderen luisterden, althans een paar, en ik heb alles uitgelegd wat ook de bedoeling was. Maar het was goed dat de echte lerares naast me stond om me zo nu en dan uit de brand te helpen, anders was ik vast nog meer tijd kwijt geweest, en daarmee natuurlijk de aandacht van de kinderen. In ieder geval een punt voor de volgende keer, en dan moet ik er ook op letten dat ik iets meer structuur in de les aanbreng, denk ik, zodat alles wat helderder wordt.
Ik was tevreden dus, en ook al was de klas nog een beetje passief, het lijkt me op zich wel een aardige klas, en ze noemen me meneer, dus dat kan niet meer stuk!
2e les: 'Ik word in school al aangesproken als "de wiskundeleraar", en de leerlingen schijnen het wel leuk te vinden. Een positief teken dus, want zo krijg je ook iets terug voor wat je erin stopt. Toch is het lesgeven wel lastig. Niet alleen omdat je de aandacht vast moet houden, maar ook omdat je, als je voor zo'n grote groep staat, totaal niet weet hoe je uitleg overkomt. Je krijgt ontzettend weinig feedback vanuit de klas, dus je weet niet of de leerlingen het echt snappen. Dat wijst zich pas vanzelf na een proefwerk, omdat dat het toetsingsmoment is. (...) Het is namelijk niet alleen uitleg geven, maar ook controleren of de leerlingen het echt snappen. Je schiet als het ware geblinddoekt woorden de klas in, en hoopt dat ze treffen, maar of ze dat doen, weet je dus niet. Maar goed, dit ontneemt mijn plezier er niet in, en ik hoop dat die feedback binnenkort nog wel komt. Verder ging het trouwens prima, erg veel problemen ondervind ik niet, al hebben de kinderen nog steeds wel de neiging om mevrouw Hallmann erbij te roepen als ze iets niet snappen, maar dan loop ik er maar heel stoïcijns naar toe.'
Na een paar lessen was Sjoerd al meer zelfverzekerd:
6e les: 'Een rustige les dit keer, doordat ik de kinderen zelfstandig aan het werk had gezegd. Dit ging goed, en bespaarde mij een paar kopzorgen over hoe je dingen voor de klas goed en duidelijk uitlegt. Dit blijft namelijk lastiger dan individuele uitleg, omdat je daarbij beter ziet of je boodschap overkomt. Snappen de kinderen je individuele uitleg niet, dan laten ze dat sneller merken dan als je voor de klas staat. Ik was dus erg tevreden, en ook de kinderen vonden het volgens mij niet erg. Ze gingen over het algemeen goed aan het werk, het ene kind natuurlijk beter dan het andere, en ik heb ze niet extreem tot stilte moeten manen. Dat moet ook niet, wat mij betreft is een beetje praten en overleggen juist wel goed, zolang het maar niet de spuigaten uitloopt. Eigenlijk, al met al, een les gegeven die ik zelf ook het liefste heb, beetje zelf werken met een goede sfeer in de klas, en ik had ook het idee dat de meeste kinderen mijn mening in deze deelden. Goeie zaak!'
De laatste les van Sjoerd was heel goed:
12e les: 'Vandaag de laatste les, een hele aparte gewaarwording. Het ging goed, ik heb de kinderen eerst een paar zaken uitgelegd, waarna ze zelfstandig aan de gang gingen. Ik heb in al die tijd veel geleerd over het lesgeven! Geweldig, natuurlijk! Dat het goed ging bleek wel uit het feit dat ik zonder moeite alleen voor de klas kon staan, ook terwijl Hallmann echt het lokaal uit was. Wie had dat een paar maanden geleden gedacht. Ik niet, en ik weet ook niet of ik het toen wel gedurfd had. Die kleine kinderen, voor je het weet eten ze je op... Toen ik begon dacht ik dat ik in staat zou zijn om 'mijn' kinderen wiskunde te leren liefhebben. Is dat gelukt? Ik weet het niet, dat zal pas over een tijdje blijken. Wel weet ik dat ik een band heb ontwikkeld met deze kinderen, dat ik hele leuke tijden heb gehad en dat ik veel heb geleerd. Het onderwijs is niet mijn directe doel, maar ik weet nu wel dat ik het leuk zou gaan vinden om les te geven. Je weet nooit wat je overkomt, natuurlijk. Verder blijft het presenteren en het staan voor een grote

Vlnr: Teresa Hallmann, Marjolijn Bosma, Eline de Graaf, Marjolein Admiraal





Marjolijn Bosma

groep iets wat je vast wel weer eens tegenkomt, en met deze ervaringen die ik nu heb weet ik dat ik daar minder problemen mee zal hebben.
Het was een leuke les vandaag. Aan het eind bedankte de klassenvertegenwoordiger mij namens de hele klas, wat ik zeer waardeerde. Ook de kaart van Hallmann waarin zij mij bedankte vond ik een heel leuk gebaar, al had ik natuurlijk ook alle redenen om haar te bedanken voor deze kans die ze mij geboden had.
Ik geloof uiteindelijk dat de klas een goede tijd heeft gehad. Ik hoop het in ieder geval!'

Tot slot

Ik wil mijn project continueren, het liefst nog uitbreiden; ideeën genoeg.
Ik vervolg mijn experiment ook dit schooljaar, maar ik heb nu gekozen voor een andere doelgroep. Drie leerlingen uit de 3e klas werken regelmatig samen met een klein groepje leerlingen uit groep 8 van basisschool 'Leeuwarder Schoolvereniging'. Dat zijn goede leerlingen met talent voor wiskunde en met vermogen om snel moeilijke stof op te nemen. Dit zorgt voor meer uitdaging voor onze leerlingen. Ze doen dat één keer per maand, na schooltijd. De les duurt 45 minuten. Ook laat ik de goede leerlingen uit de derde klas regelmatig bijles geven aan medeleerlingen.
Op deze manier probeer ik mijn leerlingen actiever te laten leren. Zij zijn enthousiast, en ik ook!

Over de auteur

Teresa Hallmann (e-mailadres: hallmann@chello.nl) is docente wiskunde aan het Gymnasium OSG Piter Jelles in Leeuwarden.

ZWOEGEN DOOR DE MODDER EN ZWEVEN LANGS DE HEMEL

[Evelien Bus]

Ter inleiding (*red.*)

Evelien Bus stopte na een paar jaar met haar wiskundestudie omdat ze tegen de grenzen van haar onbehagen aanliep: ze haalde goede toetsresultaten, maar behield tegelijkertijd het gevoel dat ze de wiskunde op te veel gebieden niet echt doorgrondde; ze vond geen antwoorden op de vragen die ze zichzelf over de stof stelde, en haar liefde voor het vak sloeg zo langzamerhand om in aversie.
Na een langdurige onderbreking, waarin ze een theateropleiding deed en les gaf op een middelbare school, is ze teruggekeerd naar de universiteit en rondde haar studie af met een bijzonder onderzoek. Naar aanleiding van haar onderzoeksscriptie schreef ze een artikel voor Euclides dat in twee delen zal verschijnen. Hieronder vindt u het eerste deel.

Aanleiding

'Sinds mijn zestiende ben ik in mijn hoofd eigenlijk altijd met wiskunde bezig', vertelt Frans Oort, emeritus in de algebraïsche meetkunde. 'Als ik even nergens op geconcentreerd hoef te zijn, duikt het op: "O ja, wat was ik ook weer aan het doen?" 's Ochtends in bad bijvoorbeeld. Heerlijk. Ik word ook wel eens 's nachts wakker en ga een half uurtje wiskunde doen. Daarna slaap ik weer tevreden verder. Alleen als ik op vakantie ga, beslis ik van tevoren of ik het knopje uitzet of niet.'
Herkenbaar of verbazingwekkend? Is wiskunde voor u ook een spannend liefje, aan wie je graag je stille gedachten besteedt? Is ze te vergelijken met een verre vriend, met wie je af en toe een paar intensieve dagen doorbrengt? Of is ze een oudere broer of zus, een maatje, die altijd gelijk heeft en aan wie je je enorm kunt ergeren? Of een Mona Lisa: mysterieus, aantrekkelijk, maar al eeuwen dood?

Voor mij als middelbare scholier en als beginnende wiskundestudent aan de Universiteit Utrecht was wiskunde een goede vriendin. Ik vond het leuk om met wiskunde bezig te zijn, ik vond het fascinerend en mysterieus. Gaandeweg mijn studie veranderde dat. Wiskunde werd onbereikbaar en onbekend. Alleen via mijn docenten en uit de boeken vernam ik nog van haar bestaan. Mijn docenten vertelden mij feiten, maar ze zeiden niets over hun relatie tot het vak. Mijn afstudeeronderzoek heb ik daarom besteed aan de relatie die wiskundigen hebben met het vak. Ik wilde weten hoe mijn docenten en hun collega's het beoefenen van wiskunde beleefden en beleven. Voor mijn afstudeeronderzoek heb ik 17 wiskundigen geïnterviewd. Onder hen waren mensen die na hun studie verder zijn gegaan als onderzoeker aan een universiteit of in een bedrijf. Ook waren er mensen die na hun studie in het bedrijfsleven zijn gaan werken.
Het ligt voor de hand dat mensen die wiskunde zijn gaan studeren, positieve ervaringen hebben gehad met het vak. Alle geïnterviewden zijn wel eens gegrepen door wiskunde, op een vergelijkbare manier als Frans Oort. Voor de meesten blijft dit echter beperkt tot een aantal keren, of een bepaalde periode. Ook een minder symbiotische band met het vak kan veel goeds opleveren, zoals voldoening, trots en schoonheidservaringen, zo vertellen ze.
Tegenover positieve ervaringen staat voor iedereen ook een flinke dosis frustratie. Ook in de bibliotheek vond ik enkele verhalen en beschouwingen over de beleving van wiskunde door wiskundigen, waaronder het succesverhaal van Andrew Wiles die na jaren zwoegen de Laatste Stelling van Fermat bewees.
In dit artikel bespreek ik themagewijs een aantal resultaten uit mijn onderzoek.

Verleiding en verlating

Uit alle interviews en uit de literatuur blijkt dat veel wiskundigen gedeeltes van de wiskunde prachtig vinden. Ze roemen de meetkundige schoonheid van sommige objecten, verrassende stellingen, ingenieuze bewijzen, maar vooral theorieën die eenvoud aanbrengen in complexiteit en inzicht geven in de kern van een probleem.
Inzicht en schoonheid hangen nauw samen. De geïnterviewden noemden ze vaak in één adem. Frans Oort: 'Algebraïsche bewijzen geven vaak veel inzicht. Bij veel bewijzen denk ik: ja natuurlijk, wat is het verschrikkelijk mooi.' Omgekeerd is het moeilijk om de schoonheid te zien van een wiskundige theorie die je niet begrijpt.
Is alle wiskunde mooi? De geïnterviewden vinden van niet. Maar ze zijn het er allerminst over eens welke wiskunde mooi is en welke niet. Gian-Carlo Rota, wiskundige, schrijft in zijn artikel The phenomenology of mathematical beauty[1]: 'Mathematicians seldom use the word "ugly"; in its place, one finds such terms of disparagement as "clumsy", "awkward", "obscure", "redundant", and, in the case of proofs, "technical", "auxiliary", and

“pointless”. But in actual fact, the most frequent expression of condemnation used by mathematicians is the rhetorical question: “What is this good for?”’
Wiskunde is verleidelijk om haar schoonheid, maar ook om de roes waarin ze je kan brengen. Zo’n roes kan ontstaan door het beleven van een *Aha-Erlebnis*. Je krijgt er een kick van, zegt meer dan de helft van de geïnterviewden. In de literatuur wordt een aantal mooie metaforen gebruikt voor *Aha-Erlebnisse* (overigens door sommigen Eureka-ervaringen genoemd). Andrew Wiles vergelijkt ze met vinden van het lichtknopje in een donkere kamer, waar je soms maanden lang in hebt rondgedoold[2]. Paul Levy, een bekende Franse wiskundige, vergelijkt ze met het bereiken van de top van een berg na een lange klim: je hebt een mooi uitzicht en er openbaren zich nieuwe gebieden[3].
Eén van de charmes van de wiskunde ligt in de zekerheid die ze ons kan bieden. Het woord wiskunde betekent letterlijk ‘kunde van het zeker weten’. Het woord is populair gemaakt en mogelijk zelfs bedacht door Simon Stevin[4], 1548-1620. Een aantal geïnterviewde wiskundeonderzoekers zegt dat wiskundigen het vrijwel altijd met elkaar eens zijn over de vraag of een bepaald bewijs sluitend is of niet. Dat geeft houvast: zoiets komt in het dagelijks leven niet vaak voor.
Tenslotte zijn er ook geïnterviewden die gedreven worden door de waarheid en eeuwigheidswaarde van wiskunde. Henk Barendregt: ‘De waarheid die wiskunde bevat, bestaat ook zonder ons. De Stelling van Pythagoras blijft voor altijd geldig, ongeacht of mensen zich hiermee bezighouden of niet. Die mensoverstijgende kant en die eeuwigheidswaarde geven me een speciale kick. In die zin staat wiskunde in schril contrast tot het tijdelijke universitaire leven, met zijn curriculumwijzigingen en vergaderingen.’

De aanvankelijke verleiding kan overgaan, vertellen enkele geïnterviewden. Vervelend wordt wiskunde dan niet, maar wel saai. Henk Barendregt: ‘Tijdens de studie merkte ik dat ik op een gegeven moment het spelletje wel gezien had. Ik had door hoe wiskunde werkte: je kunt iets uitzoeken, je kunt iets bewijzen, je kunt er verleid door worden enzovoort. Ik wilde iets anders.’ Sommigen geïnterviewden hebben om die reden de wiskunde verlaten.

Ploeteren en schitteren

Wiskunde is een moeilijk vak. Drie van de vijf vrouwen die ik heb geïnterviewd, werd door een decaan of studieadviseur afgeraden om wiskunde te gaan studeren. Ook al hadden ze een 8 op hun vwo-eindlijst voor wiskunde-B, ze zouden niet over voldoende wiskundig inzicht beschikken. Kennelijk hebben sommigen de idee dat de studie wiskunde alleen voor echte (mannelijke?) bollebozen is.
Cijfers lijken dit beeld te bevestigen. Het gemiddelde cijfer voor wiskunde op het vwo-eindexamen schommelt voor wiskundestudenten rond de acht[5]. Ook voor andere vakken scoren ze relatief goed. Aan de Universiteit Utrecht hadden in 2001 en 2002 alleen de eerstejaars van twee opleidingen waarvoor een selectie plaatsvond, gemiddeld hogere vwo-eindcijfers, namelijk geneeskunde en de bacheloropleiding aan het University College[6]. Ondanks het feit dat wiskundestudenten op het vwo goed hebben gepresteerd, zijn de studierendementen van de universitaire wiskundeopleidingen laag. Minder dan dertig procent haalt de propedeuse in één jaar[7]. In totaal haalt zo’n 30 tot 40% uiteindelijk het doctoraalexamen[6]. Deze cijfers alleen maken niet duidelijk dat de wiskundestudie zwaar is. Studenten vallen ook af omdat ze de studie wel aankunnen maar niet leuk vinden. Toch zag ik bij mijn medestudenten dat de zwaarte wel degelijk een reden was om de studie te staken. Met negens voor wiskunde-A en -B op mijn vwo-eindlijst heb ik zelf tijdens de studie hard moeten aanpoten.
Veel geïnterviewden, waaronder ook de latere hoogleraren, volgden tijdens hun studie een aantal vakken die ze nauwelijks begrepen. Jan Tuitman, een Groningse wiskundestudent die in zijn eerste studiejaar wiskunde 115 studiepunten haalde (bijna drie keer nominaal): ‘Soms moet je ontzettend veel geduld hebben voordat alles in je hoofd zit en je er zelf wat aan kunt toevoegen. Ik heb bijvoorbeeld heel veel moeite moeten doen om me ook maar een klein beetje thuis te voelen in de algebraïsche meetkunde. Het gaat allemaal zo traag. Ik gooi wel eens geërgerd een boek aan de kant als ik iets niet meteen snap. Toen ik een jaar of veertien, vijftien was en naar de bibliotheek ging, had ik het idee dat ik alles kon. Nu al een hele tijd niet meer.’
Niet alleen voor wiskundestudenten, ook voor wiskundeonderzoekers is het volkomen normaal om te moeten ploeteren. De geïnterviewde onderzoekers vertellen allemaal dat ze hard moeten werken om vooruit te komen. Eduard Looijenga: ‘Onderzoek doen is voor negenennegentig procent transpiratie en voor één procent inspiratie.’ Om wiskundeonderzoek te doen heb je kennelijk veel goede moed nodig, en daarnaast ook doorzettingsvermogen en een olifantenhuid.
Wiskunde kan tijdens de studie of in het werk zó moeilijk zijn, dat er twijfels ontstaan over het eigen kunnen. De meeste geïnterviewden hebben periodes van onzekerheid gehad. Als student vroegen ze zich af of ze de studie wel aankonden. Tijdens het werk als wiskundeonderzoeker twijfelden ze of ze er wel geschikt voor waren. De geïnterviewde vrouwen waren het meest onzeker over hun eigen talent.
In literatuuronderzoek bleek dat dit fenomeen zich ook bij niet-wiskundigen voordoet, soms in heftige mate. Al in 1978 publiceerde de feministe Sheila Tobias in de Verenigde Staten ‘Overcoming Math Anxiety’[8]. Daarin beschrijft ze hoe mensen angst voor wiskunde kunnen ontwikkelen. Sheila Tobias gelooft dat miljoenen Amerikanen bang zijn voor wiskunde, met name vrouwen.
‘Ik had een 3 voor wiskunde op het gymnasium-b, en zie waar ik ben gekomen!’, zei mevrouw Ter

Horst, burgemeester van Nijmegen, in een toespraak op het 39e Mathematisch Congres. Ze toonde zich dus trots dat ze het ver had geschopt ondanks haar falen in wiskunde. Toch is het niet erg realistisch om wiskundige prestaties in verband te brengen met carrièrekansen als bestuurder. Zou die 3 voor wiskunde haar het gevoel hebben gegeven dat ze dom was en het daarom niet ver zou schoppen in de maatschappij?

Schitteren is de beloning van het ploeteren. Het bekendste levende voorbeeld hiervan is Andrew Wiles. In het televisieprogramma 'Horizon: Fermat's Last Theorem' van de BBC vertelt hij over het zoeken naar een bewijs van het Laatste Vermoeden van Fermat[9]. Als tienjarige jongen droomde hij er al van een bewijs te vinden. Toen hij later als wiskundige in Cambridge (Engeland) werkte, is hij er serieus mee aan de slag gegaan. Hij heeft jaren lang gedisciplineerd gewerkt op zijn zolderkamer. Niemand wist waar hij mee bezig was, behalve zijn vrouw. Na zeven jaar arbeid dacht Wiles het bewijs rond te hebben. Het was juni 1993. Hij maakte het wereldkundig tijdens een serie voordrachten in Cambridge. Enkele maanden later werden er gaten in het bewijs ontdekt. Wiles moest opnieuw aan de slag en ging naar eigen zeggen 'door de hel'. Hij werd gered door een plotselinge ingeving, waarmee hij in 1994 het bewijs kon voltooien. In de documentaire vertelt hij over dat moment met een traan van geluk op zijn gezicht.
Ook de geïnterviewden kennen zulke ervaringen. Rainer Kaenders, tegenwoordig wiskundedocent aan het Canisius College in Nijmegen en universitair docent aan het Instituut voor Leraar en School van de Radboud Universiteit Nijmegen: 'In mijn afstudeerproject in de topologie en algebraïsche meetkunde liep ik totaal vast. Ik moest heel veel moeite doen om überhaupt te zien waar het om ging. Toen ik een hele tijd had vastgezeten, koos ik een iets ander onderwerp. Ineens vond ik een manier om daar een nieuwe stelling te bewijzen. De frustratie van jaren afzien kreeg een ruime beloning. Niemand om me heen begreep mijn geluk helemaal, maar ik wist hoe hard ik ervoor had gevochten. Ik werd uitgenodigd om er in Frankrijk over te vertellen. Dat gaf natuurlijk wel een kick. Toch was ik ook wel zenuwachtig. Tijdens één van mijn voordrachten riep iemand: "Dit is verkeerd!" Het was een man die alles wist over kwadratische vormen, waar ik eigenlijk bijna niets van wist. Maar ik heb hem, met het zweet in mijn handen, weten te overtuigen. Toen vond hij het ineens triviaal. Dat leerde me wat over de arrogantie van sommige wiskundigen. Die stelling was helemaal niet triviaal. Hij heeft mij heel veel kracht van mijn leven gekost. Na mijn afstuderen bood mijn afstudeerprofessor me een baan aan. Na een tijd van uitputting en frustraties hoorde ik er opeens helemaal bij. Als je een stelling vindt, dan ben je iemand.'
Rainer Kaenders vond een beloning in zijn eigen voldoening toen hij zich door een moeizaam proces heen had geworsteld. Vrijwel alle geïnterviewden beamen dit. Hoe moeizamer het proces, des te groter de beloning, zeggen sommigen zelfs. Rainer werd ook rijkelijk gewaardeerd door zijn docent en diens Franse collega's. Dat is volgens sommige geïnterviewden minder vanzelfsprekend. Doorgaans begrijpen maar weinig collega's waar je mee bezig bent.
Tenslotte is er nog de niet-wiskundige omgeving die jou als wiskundige kan laten schitteren. Dit is vooral aan de geïnterviewde vrouwen voorbehouden. Femia Smit, werkzaam als onderzoeker bij de Bijenkorf: 'Vrienden hadden ontzag voor mijn studiekeuze.' Simone van Neerven, medewerker bij de technische dienst van de KLM, anticipeerde hierop: 'Ik vond het stoer om een studie te gaan doen die niet iedereen aan kan.' Waar mannen die wiskunde studeren soms worden gezien als nerds, genieten vrouwelijke wiskundigen respect.

Met dank aan Chris Zaal.

Noot

De volledige scriptie is te downloaden via www.math.uu.nl/people/vorst.

Bronnen

---

[1] Gian-Carlo Rota: The phenomenology of mathematical beauty. In: Synthese, Kluwer Academic Publishers, Nederland, serie III, 1997, pp. 171-182.
[2] Simon Singh: Het laatste raadsel van Fermat. Amsterdam: Uitgeverij de Arbeiderspers, 1997. Oorspronkelijke titel: Fermat's Last Theorem (vertaling Mea Flothuis).
[3] Paul Levy: Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien. Parijs: Blanchard, 1970.
[4] Bas Spitters: Simon Stevin, die vermaerde wiskonstenaer. Naar aanleiding van een lezing van Teun Koetsier op 10 oktober 1998 voor de alumni wiskunde van de Katholieke Universiteit Nijmegen. Gepubliceerd op internetpagina www-wortel.sci.kun.nl
[5] Informatie Beheer Groep, afdeling persvoorlichting, Groningen.
[6] Bureau Controller, Universiteit Utrecht.
[7] Vereniging van Universiteiten (VSNU): Onderwijsvisitatie wiskunde. Utrecht, 2002.
[8] Sheila Tobias: Overcoming math anxiety. New York: W.W. Norton & Company, 1993.
[9] 'Horizon: Fermat's Last Theorem', televisiedocumentaire van de BBC, gemaakt door John Lynch.

Over de auteur

Evelien Bus is sinds 2003 docent aan de lerarenopleiding wiskunde van de Hogeschool van Utrecht.
Haar e-mailadres is evelien.bus@hvu.nl.

MACHTIG GEROMMEL

Niet altijd doen machines wat ik er van verwacht. Het is pas echt leuk als de machine rariteiten vertoont – bijvoorbeeld bij machtsfuncties.

[Klaas Wijnia]

Aanleiding

Met nog een paar maanden te gaan voor mijn pensionering (juni 2005) wil ik graag de volgende ontboezeming kwijt.
Na een aantal jaren in de Tweede fase wiskunde-B in het vwo gegeven te hebben mag ik nog één keer een groep leerlingen naar het wiskunde-A examen loodsen. In klas 5 wordt de machtsfunctie met zijn afgeleide behandeld. Uiteraard komt dan ook het gebruik van het GRT (grafisch rekentuig) aan bod. Onze methode, *Getal en Ruimte*, geeft dat je een vergelijking als $x^{0,68} = 2$ kunt oplossen door in te toetsen $0.68\,[\sqrt[x]{\ }\,]\,2$ (tussen [en] staat een in te drukken toets van het GRT; red.).
De oplossing is dan $x = 2,7713...$
De analogie met de oplossing van de vergelijking $x^3 = 2$ is duidelijk: $x = \sqrt[3]{2}$.
Toch bekruipt me een gevoel van onbehagen. Het wortelbegrip heb ik altijd verbonden met machten met *gehele* exponenten. De vergelijking $x^n = 2$ (n geheel, $n \geq 2$) heeft een oplossing $x = \sqrt[n]{2}$. Dit blijft lastig voor leerlingen, want zij moeten zelf de tweede oplossing noemen als n even is, en dat geeft het rekentuig niet.

Onmogelijk?

Terugdenkend aan de eerste scientific calculator (eind jaren '70) was het intoetsen van $(-2)^3$ een handeling waarbij in het scherm aangegeven werd dat dit onmogelijk was: intern rekende de machine eerst de logaritme van –2 uit, vermenigvuldigde dit getal met 3 en rekende het antwoord terug met de inverse functie van de logaritme, dus met 10^x: een onmogelijkheid in de reële getallen.
Inmiddels geeft elke rekenmachine na intoetsen van $(-2)^3$ wél het antwoord –8. Kennelijk hebben de programmeurs hiervoor wat extra voorzieningen ingebracht in de chips.
Ook in het havo-examen wiskunde-A12 (2004) komt de uitdrukking $x^{0,68}$ voor. Er hoeft geen vergelijking opgelost te worden, maar er moet wel gedifferentieerd worden.

Laten we dus nu eens kijken tot welke strapatsen de programmeurs in staat zijn:
Los op: $x^3 = -2$.
Oplossing: $x = \sqrt[3]{-2} = -1,2599...$
$x^4 = -2$ geeft $x = \sqrt[4]{-2}$ met als gevolg ERR:NONREAL ANS.
Tot zover is er niks mis.

Drie vergelijkingen

Onderzoek nu de oplossingen van de volgende drie vergelijkingen (eerst zelf proberen).
(a) $x^{0,62} = -2$
(b) $x^{0,63} = -2$
(c) $x^{0,64} = -2$
Oplossing van (a): $x = \sqrt[0,62]{-2} = 3,058667...$
dus $(3,058667...)^{0,62} = -2$??
Oplossing van (b): $x = \sqrt[0,63]{-2} = 3,004867...$
dus $(3,004867...)^{0,63} = -2$??
Oplossing van (c): $x = \sqrt[0,64]{-2}$ = ERR:NONREAL ANS
Waarom dan nu geen antwoord?
Een betere oplossingsstrategie lijkt mij:
$x^{0,62} = -2$
$(x^{0,62})^{1/0,62} = (-2)^{1/\,0,62}$
(extra regel: *bij 'rare machten' geen negatief grondtal*)
Conclusie: geen oplossing voor deze vergelijking, maar... wat levert het 'tuig'?
$(-2)^{1/0,62} = 3,05866...$
Is intern in het programma de breuk $\frac{100}{62} = \frac{50}{31}$ gevonden en daarna misschien gebruik gemaakt van $(-2)^{50/31} = ((-2)^{50})^{1/31} = \sqrt[31]{(-2)^{50}}$?
Is dan de oplossing van (b) navenant: $x = (-2)^{100/63}$ en dus positief?
De oplossing van (c) verloopt dan op dezelfde wijze:
$(-2)^{1/0,64} = (-2)^{100/64} = (-2)^{25/16} = ((-2)^{25})^{1/16} = \sqrt[16]{(-2)^{25}}$
en dit is een even wortel uit een negatief getal: het tuig geeft keurig NONREAL ANS.

Ook aardig is het vergelijken van de grafieken van de functies van de linkerleden van de vergelijkingen (a), (b) en (c).

Maxima en minima

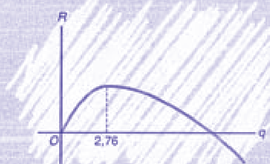
Het maximum van $R = 5q^{0,6} - 2q$ bereken je met de afgeleide als volgt.

1 $\frac{dR}{dq} = \frac{d}{dq}(5q^{0,6} - 2q) = 0,6 \cdot 5q^{-0,4} - 2 = 3q^{-0,4} - 2$

2 $\frac{dR}{dq} = 0$ geeft $3q^{-0,4} - 2 = 0$

$q^{-0,4} = \frac{2}{3}$

$q = \sqrt[-0,4]{\frac{2}{3}} \approx 2,76$



3 Uit de schets van R hiernaast volgt dat R maximaal is voor $q \approx 2,76$.

4 $R_{max} \approx 3,67$.
Zie het GR-scherm hiernaast.

```
(-.4)ˣ√(2/3)
         2.755675961
5Ans^.6-2Ans
         3.674234614
```

$x^n = p$ geeft $x = p^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{p}$

De oplossing van de vergelijking $x^5 = 310$ is $x = 310^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{310} \approx 3,150$.

De oplossing van de vergelijking $x^{-1,8} = 58$ is $x = 58^{\frac{1}{-1,8}} = \sqrt[-1,8]{58} \approx 0,105$.

Zie het scherm hiernaast.

```
310^(1/5)
         3.149722833
5ˣ√310
         3.149722833
58^(1/-1.8)
         .1047895032
(-1.8)ˣ√58
```

Fig. 3.27

FIGUUR 1 Uit Getal & Ruimte, EM 4, pag. 108

FIGUUR 2 Uit Getal & Ruimte, CM 4, pag. 118

Achterliggende vraag: Is er prioriteit in het uitrekenen van
$(-2)^{p/q} = ((-2)^p)^{1/q}$, dan wel
$(-2)^{p/q} = ((-2)^{1/q})^p$
en is dan $(-2)^{1/2}$ iets anders dan $(-2)^{2/4}$?

Verrassend zijn de grafieken van $y = x^{0,60}$, $y = x^{0,62}$ en $y = x^{0,64}$ als niet op het juiste domein gelet wordt. Ik had de instelling voor het window voor x nog standaard staan op [–10, 10].

Afgeleide

Ooit is op een wiskunde-I examen (1976) gevraagd naar de niet-differentieerbaarheid in $x = 0$ van de functie
$f(x) = -2x + \sqrt[3]{x^2}$
Daarbij werd verondersteld dat de leerlingen wisten dat
$h(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ als $x \geq 0$, en
$h(x) = \sqrt[3]{x} = -(-x)^{\frac{1}{3}}$ als $x \leq 0$
Zij moesten hiervan afgeleide functies bepalen, dan wel uitsluitend de definitie van de afgeleide van f in $x = 0$ gebruiken.
De functie $g(x) = \sqrt[3]{x}$ was alleen te differentiëren met behulp van $y = x^{1/3}$ voor $x > 0$ (zie noot [1]).
Regelmatig gebruik ik computeralgebrapakketten als Mathcad en Studyworks om grafieken op te nemen in mijn proefwerken. Eens kijken wat ik nu te zien krijg bij $f(x) = x^{1/3}$ en $g(x) = \sqrt[3]{x}$. De grafiek van f wordt alleen getekend voor $x > 0$, de grafiek van g op heel $\mathbb{R}$. En met $h(x) = \sqrt[0,60]{x}$ word ik gestraft met een foutmelding: in $\sqrt[n]{x}$ alleen n geheel, $n \geq 2$. Zo hoort het...

Rommelig 'ge-macht'

Nu terug naar machten in plaats van wortels.
Waarom wel $(-2)^3$, $(-2)^{-3}$ en $(-2)^{0,64}$
en niet $(-2)^{0,63}$ en $(-2)^{0,62}$?
Wat is de uitkomst van $-\sqrt[3]{-2}$? En van $\sqrt[-3,1]{-2}$ en $\sqrt[-3,2]{-2}$? Probeer ook $\sqrt[\sqrt{5/4}]{-2}$.

Conclusies:
1. Gebruik in de functie $\sqrt[x]{a}$ voor x alleen gehele getallen ≥ 2 en a positief.
2. Los $x^a = q$ op door beide kanten tot de macht $\frac{1}{a}$ te nemen.
3. Vertrouw programmeurs nooit! (Ben ik daarom leraar geworden?)

Nog een laatste opmerking

Ik kan het niet laten, af en toe in de vakantie een wiskundeboek voor het voortgezet onderwijs te kopen. Zo kocht ik onlangs in Oostenrijk het boek 'Mathematik Positiv für den 6.Klasse AHS' (voor leerlingen van ongeveer 16 jaar).
Uit dit boek een opgave waarmee ik me in de vakantie heb beziggehouden.
Los op: $\sqrt{8x+3} + \sqrt{8x+7} = 2\sqrt{2x+6} + 2\sqrt{2x+4}$
Voor zoiets pak je nu de GR, en via de 'Solver' krijg je een antwoord.
Van de Oostenrijkse leerling wordt verwacht dat hij de vergelijking met een aantal keren kwadrateren oplost. Is er nu wél of geen oplossing? Ik had wel wat meer papier dan de rand van de krant nodig! Ook nu weer: het GRT heeft zijn beperkingen.

Noot

[1] Zie de definitie uit Moderne wiskunde deel 9v editie 1976, derde herziene druk, blz. 138:
Bij elke reële n definiëren we een functie $f: x \to x^n$ $(x \in \mathbb{R}^+)$.
Nu geldt: f is differentieerbaar en heeft als afgeleide functie $f': x \to nx^{n-1}$ $(x \in \mathbb{R}^+)$.

Over de auteur

Klaas Wijnia (e-mailadres: k.wijnia@wxs.nl) is sinds 1970 werkzaam aan de Regionale ScholenGemeenschap Ter Apel. Hij heeft zich in de loop der jaren met wisselend enthousiasme beziggehouden met programmeren, in onder meer Algol-60, Basic en TI-Basic.



FIGUUR 3 Uit Getal & Ruimte, Havo NG/NT 2, pag. 76

Mededeling / Vrouwen en wiskundeonderwijs

De International Organisation of Women and Mathematics Education (IOWME) geeft drie keer per jaar een Engelstalige nieuwsbrief uit. IOWME is een internationaal netwerk van vrouwen die in en met wiskundeonderwijs bezig zijn. De Nieuwsbrief wil vooral een plek zijn voor 'discussion about gender and mathematics with items, short and long, from all around the world'.

Een ieder die het laatste nummer digitaal wil ontvangen, kan mij dat via e-mail laten weten. Je wordt dan in de verzendlijst opgenomen.

Informatie:
Jenneke Krüger (coördinator Nederland),
e-mailadres: *j.kruger@slo.nl*.

Rectificaties Euclides 80(4)

In de boekbespreking van 'De Cijfferinghe' van Willem Bartjens wordt op pag. 199 gemeld dat de inleiders (Danny Beckers en Marjolein Kool) geen historici zijn. Dit is niet juist.
Beckers is afgestudeerd cultuurhistoricus en is, na het behalen van de eerstegraads bevoegdheid wiskunde, gepromoveerd in de wetenschapsgeschiedenis, op een onderwerp uit de geschiedenis van de wiskunde met speciale aandacht voor het onderwijs in wiskunde.
Kool studeerde onder meer Nederlandse taal- en letterkunde, specialisatie Middelnederlandse letterkunde, met als bijvak geschiedenis van de wiskunde, en deed promotie-onderzoek naar Nederlandstalige rekenboeken uit de 15e en 16e eeuw.

Bij het artikel 'Kinderen die niet leren rekenen' van Jo Nelissen is op pag. 171 een deel van de tekst 'Over de auteur' weggevallen. De volledige tekst luidt:
Jo Nelissen (e-mailadres: J.Nelissen@fi.uu.nl) is medewerker aan het Freudenthal Instituut. Zijn expertise betreft onder meer leer- en denkprocessen van vooral basisschoolleerlingen en leerproblemen op het gebied van rekenen-wiskunde.

DE NEDERLANDSE WISKUNDE-OLYMPIADE

[Bram van Asch]



Inleiding

Aanleiding tot het schrijven van dit artikel was de prijsuitreiking van de Nederlandse Wiskunde-Olympiade 2004. Eerst wordt hiervan een kort verslag gegeven, vervolgens wordt ingegaan op reacties met betrekking tot een aantal vragen die we voorlegden aan de groep die zich op de internationale olympiade gaat voorbereiden.

Prijsuitreiking

Op vrijdag 12 november jl. vond op de Technische Universiteit Eindhoven de prijsuitreiking plaats van de Nederlandse Wiskunde-Olympiade 2004. De bijeenkomst werd geleid door Jan van de Craats, die ook de prijzen uitreikte. De tien prijswinnaars waren:

1. Sjoerd Boersma (RSG Pantarijn, Wageningen)
2. Daan Juttmann (Sted. Gymnasium, Haarlem)
3. Johan Konter (Sted. Gymnasium, Breda)
4. Jinbi Jin (Marianum, Groenlo)
5. Johannes Steenstra (Driestar College, Gouda)
6. Ewout Schotanus (Chr. Gymnasium, Utrecht)
7. Sietske Tacoma (Gymnasium, Apeldoorn)
8. Wouter de Koning (Norbertuscollege, Roosendaal)
9. Anne de Haan (Gymnasium Felisenum, Velsen-Zuid)
10. Gert Jan Hoeve (SG Pieter Zandt, Kampen)

Aan elk van de prijswinnaars werd gevraagd of ze al plannen voor de toekomst hadden. Alle tien gaven ze aan een exacte studie te willen gaan doen: acht van hen zeiden wiskunde te gaan studeren, één econometrie en één natuurkunde.
Na de prijsuitreiking gaf Jan Donkers een beschrijving van de voorbereiding voor de internationale wiskunde-olympiade, die zal plaats vinden in juli 2005 in Mexico. Aan deze voorbereiding wordt deelgenomen door bovenstaande groep, aangevuld met enkele leerlingen die net niet bij de eerste tien kwamen. In totaal nemen 17 leerlingen aan de trainingen deel. Een team bestaande uit zes personen dat uiteindelijk aan deze internationale olympiade zal deelnemen, zal worden geformeerd uit die leerlingen die bij deze voorbereiding het beste presteren. Na de receptie vertrok de groep meteen naar een jeugdherberg voor een eerste trainingsweekend.

Olympiade en schoolwiskunde

De volgende vragen werden aan de deelnemers van het eerste trainingsweekend voorgelegd.
a. Wat vind je van de schoolwiskunde, bijvoorbeeld in vergelijking met de opgaven die je bij de wiskunde-olympiade kreeg voorgeschoteld? Vind je

wiskunde op school een boeiend, uitdagend vak? En alhoewel het voor sommigen misschien nog wel enige tijd zal duren: zie je op tegen het eindexamen, en hoe denk je je daarop voor te bereiden?
b. Waardoor ging je deelnemen aan de wiskunde-olympiade? Uitgedaagd door wiskundige problemen of misschien onder invloed van een stimulerende docent? Wat vond je van de opgaven?
c. Wat zijn je verwachtingen voor de internationale olympiade? En van de voorbereidingen daarvoor?
d. Heb je al ideeën voor een eventuele vervolgopleiding? Wiskunde, of toch maar niet?

Bij vraag a gaven twee leerlingen aan dat ze de schoolwiskunde wel redelijk interessant en nuttig vonden. Alle anderen gaven aan, de schoolwiskunde zeer saai en niet uitdagend te vinden. Een tweetal citaten:
- Wiskunde-B2 waar je stellingen moet bewijzen lijkt nog wel wat. Maar na een tijdje heb je ook dat door en wordt het eenvoudig invullen.
- Ik vind schoolwiskunde een uitdagend vak in die zin dat het moeilijk is om wakker te blijven.
Voor sommigen, met name de vierdeklassers uit de groep, is het eindexamen nog ver weg. Degenen die wel antwoord gaven op de vraag over het eindexamen, zagen er totaal niet tegen op.
Met betrekking tot vraag b geeft het merendeel van de leerlingen aan dat men meedeed omdat de problemen hen wel leuk leken, uitdagend waren. Je werd eindelijk eens een keer gedwongen om na te denken. Slechts vier leerlingen gaven aan door hun docent gestimuleerd te zijn om mee te doen. Een citaat:
- Mijn leraar zei tegen mij: ik geloof trouwens dat er de volgende twee uur ergens hier op school een soortement wiskunde-wedstrijd is; je moet maar eens kijken.
Over de opgaven was men zeer tevreden.
Uit de trainingsgroep gaat een team van zes personen naar de internationale wiskunde-olympiade. Ten aanzien van vraag c melden nogal veel leerlingen dat ze eigenlijk niet verwachten in dit team terecht te komen. Een aantal, met name vierde- en vijfdeklassers, geeft aan voor een volgende keer hogere verwachtingen te hebben. Wel verwachten ze allemaal dat zowel bij de training als bij de internationale wiskunde-olympiade de opgaven nog een stuk zwaarder zullen worden. Op de vraag of deze voorbereiding niet ten koste van het gewone schoolwerk zal gaan, geven ze vrijwel allemaal een antwoord in de volgende stijl: het gewone schoolwerk zal er niet onder lijden, want daar hoef je toch niets voor te doen.
De laatste vraag was tijdens de prijsuitreiking zelf door de tien prijswinnaars al beantwoord. Van de overigen uit de trainingsgroep antwoordden de meesten dat ze wel iets in een bètarichting wilden gaan doen. Eén wist het echt nog niet, en één beweerde heel opvallend beslist geen wiskunde of een andere exacte studie te willen gaan doen.

Enkele voorzichtige conclusies:
- Voor de mensen die goed presteren op de wiskunde-olympiade, biedt de schoolwiskunde geen enkele uitdaging.
- De rol van docenten met betrekking tot de deelname aan de wiskunde-olympiade is in elk geval in deze groep niet groot.
- Aan het gewone schoolwerk wordt zo weinig tijd besteed, dat deze groep de extra activiteiten met betrekking tot de internationale wiskunde-olympiade er gemakkelijk bij kan doen.
- Vrijwel allemaal willen deze deelnemers na het vwo in elk geval wel een exacte studie gaan doen, en de meesten kiezen daarbij toch voor wiskunde.

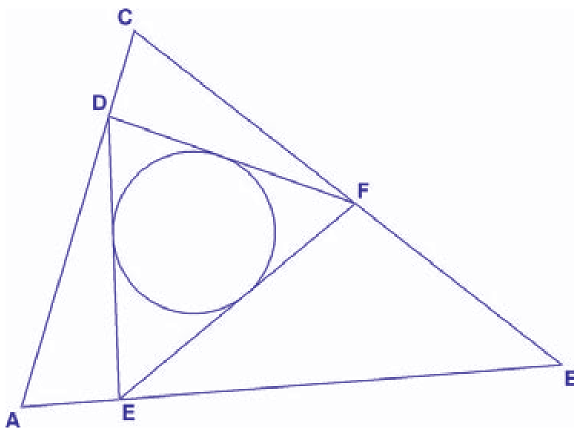
Internationale olympiade

Voor een groot aantal leerlingen uit de trainingsgroep start de voorbereiding voor de internationale wiskunde-olympiade aan het begin van hun laatste jaar op school. Het team dat uiteindelijk naar deze internationale olympiade gaat, bestaat meestal ook voor een groot deel uit zesdeklassers. Deze mensen zijn nu met de voorbereiding begonnen. Ze hebben allemaal aanleg voor wiskunde, maar geconstateerd moet worden dat de basis waarop de voorbereiding start, wel heel erg smal is. Een groot deel van de voorbereidingstijd moet besteed worden aan het aanleren van elementaire vaardigheden, waardoor de stap naar een hoger niveau moeilijk gemaakt kan worden. En dat laat zich ook onmiddellijk aflezen uit de uitslagenlijsten van de internationale wiskunde-olympiade. Tot zo'n drie jaar geleden eindigde Nederland meestal ergens in de middenmoot. De laatste paar jaar is dat heel erg verslechterd, en is Nederland terug te vinden tussen ontwikkelingslanden. Ook werden er tot voor kort regelmatig individuele medailles gewonnen, maar daarvan is nu ook geen sprake meer. Het lijkt dus de hoogste tijd om in de wiskundelessen op school maar weer eens echt wiskunde te gaan doen.

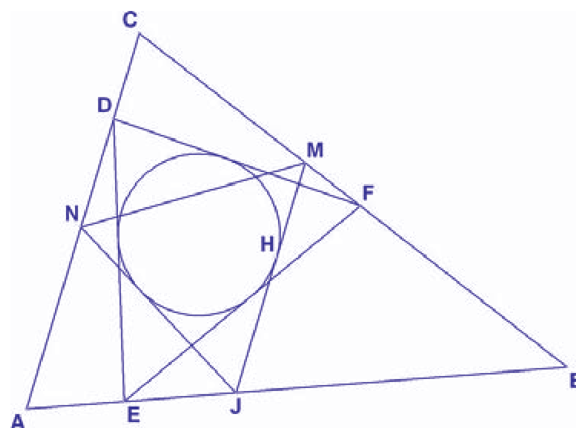
Nadere informatie over de wiskunde-olympiade: *http://olympiads.win.tue.nl/nwo/*

Over de auteur

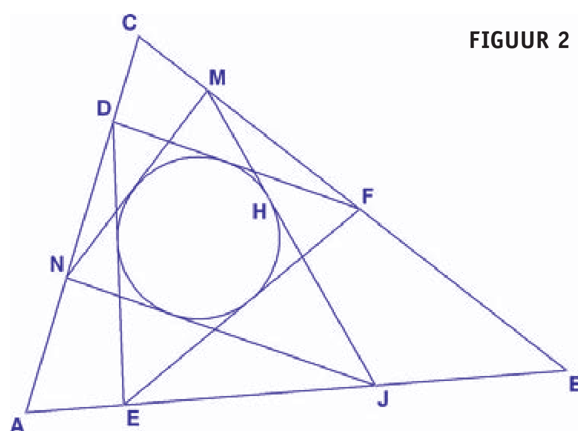
Bram van Asch (e-mailadres: a.g.v.asch@tue.nl) is redacteur van Euclides. Hij werkt als universitair docent op de Technische Universiteit Eindhoven, en is daar o.a. betrokken bij de eerstegraads lerarenopleiding.



FIGUUR 1



FIGUUR 2



FIGUUR 3



ZOEK DE DRIEHOEK

Avonturen van een programmeur

[Ton Lecluse]

Aanleiding

De afgelopen maanden ben ik bezig geweest dynamische meetkundemogelijkheden zoals je deze aantreft in Cabri en Geometer's Sketchpad te implementeren in Geocadabra[1]. Bij het testen van de software kom je allerlei aardige situaties tegen, zowel op programmeergebied als bij het bedenken van testcases. Vaak levert dit nieuwe, leuke opgaven op die je kunt gebruiken voor je toetsen, met name voor wiskunde-B2. Soms echter kom je in een situatie terecht die je wel kunt exploreren, maar waarvan je het resultaat niet direct kunt verklaren.
Hiervan wil ik een voorbeeld geven. Wellicht ook een aardige oefening in de klas.

De opgave

Gegeven een driehoek ABC. Punt D ligt op AC, punt E ligt op AB en punt F ligt op BC.
Cirkel c is de ingeschreven cirkel van driehoek DEF. Zie figuur 1.
Er is nog een tweede driehoek met hoekpunten op de zijden van driehoek ABC, die dezelfde ingeschreven cirkel c heeft. Onderzoek hoe deze driehoek ligt.

Op zich is het niet onmiddellijk duidelijk dat er een tweede driehoek is met deze eigenschap. Misschien hangt het aantal driehoeken met deze eigenschappen wel af van de keuze van de basisdriehoek *ABC* en van de keuze van de punten *D*, *E* en *F* op de zijden van driehoek *ABC*.

Exploreren op de computer

Alhoewel ik het onderzoek heb gedaan met Geocadabra, kunt u het naspelen met een ander programma dat dynamische meetkunde ondersteunt. Teken driehoek *ABC*, kies de punten *D*, *E* en *F* op de zijden en construeer de ingeschreven cirkel van driehoek *DEF*.

Uitdaging

Wanneer u zelf aan de slag wilt, kunt u dat nu doen. Leest u dan later pas het vervolg van dit artikel.

Een oplossing

Er zijn meerdere aanpakken mogelijk. Ik werk er hier slechts één uit.
(De benaming van de punten wordt in Geocadabra automatisch gegenereerd. Voor het gemak heb ik deze namen in het vervolg overgenomen.)

Plaats punt *H* op de cirkel. *H* kan vrij op de cirkelrand bewegen.
De raaklijn in *H* aan de cirkel snijdt *AB* in *J* en *BC* in *M*.
Trek de tweede raaklijn vanuit *J* aan de cirkel. Deze raaklijn snijdt AC in *N*.
Teken driehoek *JMN*. Maak eventueel de hele lijnen onzichtbaar; die storen slechts.
Sleep *H* nu over de cirkel en probeer het zo te mikken dat *MN* de cirkel raakt. Een tussenfase is getekend in figuur 2.
Uiteindelijk krijg je figuur 3. Deze figuur is niet echt exact, maar geeft wel aan dat er een tweede driehoek is.
Wanneer je punt *H* de hele cirkel laat doorlopen, zie je dat er geen derde oplossing is.

Analyse of constructie en bewijs

Ikzelf heb (nog) geen constructie kunnen vinden die tot de tweede driehoek leidt. U wel?

Een alternatief

Je kunt de opgave ook anders stellen:
Begin met een driehoek *ABC* en een cirkel binnen deze driehoek. Vraag naar de (twee?) driehoeken met hoekpunten op de afzonderlijke zijden van driehoek *ABC*, die de cirkel raken. De vraag is of er bij elke keuze van driehoek *ABC* en cirkel hierbinnen wel twee oplossingen zijn. Maar dit is slechts een vermoeden. Kunt u me verder helpen?

Die leerlingen toch...

Ik kon het niet laten het probleem aan mijn vwo-B2 klas voor te leggen. Wie me een grondige analyse kon e-mailen, zou een bonus krijgen op het volgende schoolexamen. En zoiets werkt. Maarten, een leerling, toonde al snel aan, dat niet bij iedere cirkel binnen de driehoek zo'n raakdriehoek te maken is! Doet u het even na?
(Een suggestie: ICT tijdens de les, daar heb je niet altijd tijd voor. Wat je wel kunt doen: daag leerlingen uit geschikte sommen met ICT te exploreren en hun bevindingen naar je te e-mailen. Beloon fraaie uitwerkingen met een kleine bonus op de volgende toets. Leerlingen gaan dan thuis flink aan de slag met ICT!)

Tenslotte

Ook al vindt u een redenering of constructie die tot de oplossing leidt, dan nog blijft het de vraag of deze past binnen het huidige examenprogramma. Maar het is toch altijd aardig, een open, verrassend probleem te kunnen onderzoeken zonder de oplossing te kunnen verklaren?

Noot

[1] Geocadabra kan worden gedownload van www.geocadabra.nl. Alhoewel het een (uitgebreide) demo betreft, kunnen bestanden aangemaakt door derden hiermee wel uitgebreid worden geëxploreerd.

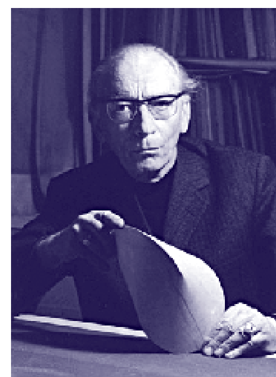
Over de auteur

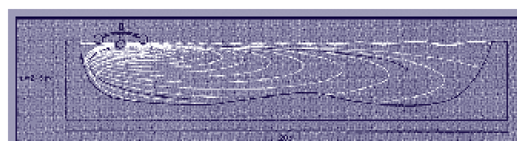
Ton Lecluse (e-mailadres: a.lecluse@planet.nl) is docent wiskunde aan Het Nieuwe Lyceum te Bilthoven en programmeur van Geocadabra.

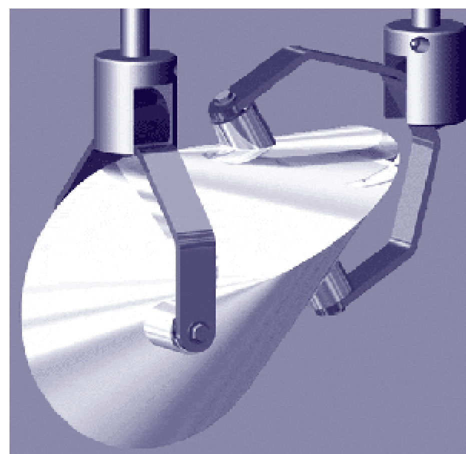
EEN OLOÏDE

[Swier Garst]

FIGUUR 1, 2, 3







Aanleiding

Op 23 juni 2004 nam Heleen Verhage afscheid van het bestuur van de NVvW. Tijd voor een cadeautje. En dat cadeautje, een oloïde, verdient een korte bespreking.

Paul Schatz

De oloïde is een kunstwerk van Paul Schatz (zie figuur 1). Schatz werd op 22 december 1898 in Konstanz geboren. In de eerste wereldoorlog werd hij als radio-operator naar het Westfront gestuurd. Hij overleefde de oorlog en ging na de oorlog in München wiskunde, techniek en filosofie studeren. Zijn ervaringen in de oorlog brachten hem er echter toe zijn artistieke talent te ontwikkelen. Tussen 1924 en 1929 werkte hij als beeldhouwer in zijn eigen atelier aan het Bodenmeer. De ontdekking van de mogelijkheid om willekeurige wiskundige lichamen binnenstebuiten te kunnen keren (1929) voerde Schatz terug naar de techniek. Tussen 1927 en 1979 (zijn jaar van overlijden) schreef hij verschillende patenten op zijn naam. Het patent van de oloïde (Schweizer Patent 500.000) stamt uit 1933.

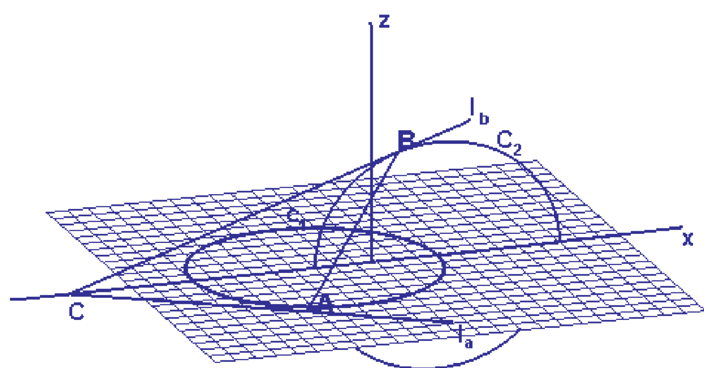
Vloeistofreiniging

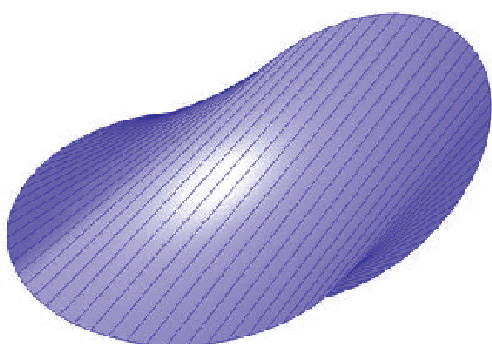
Opmerkelijk is dat de oloïde door technici een aantal jaren geleden is herontdekt. Binnen de vloeistofmechanica ontdekte men dat een oloïde die met een waggelende beweging door een vloeistof wordt getrokken, een stroom in die vloeistof op gang brengt die de verschillende lagen van die vloeistof perfect mengt. Door nu ook nog lucht uit de oloïde te laten komen is het mogelijk een vloeistof met erg weinig energie van een grote hoeveelheid zuurstof te voorzien. Daarmee blijkt de oloïde een prachtig hulpmiddel om in reinigingsinstallaties in te zetten. Wat er in de vloeistof gebeurt, dat is te zien in figuur 2 en figuur 3.

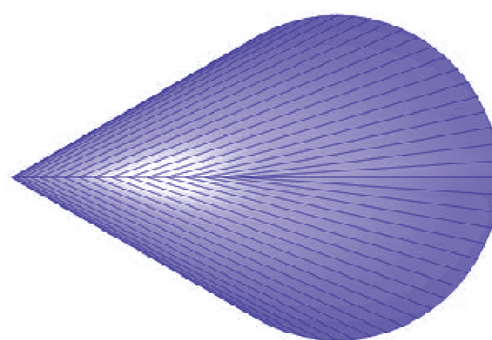
Wiskundige beschrijving

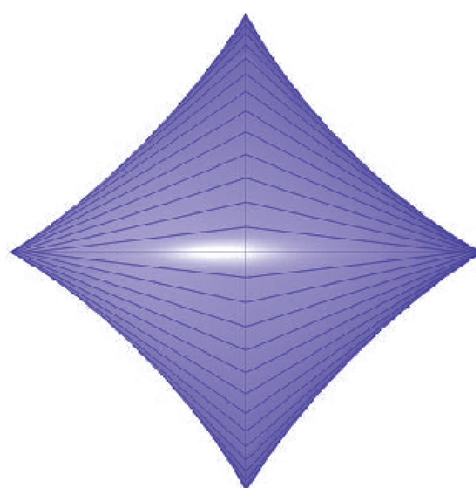
Niet alleen de fysische en artistieke achtergronden zijn interessant, ook in wiskundige zin valt er fraai aan te rekenen.
Om de overzichtelijkheid te bevorderen zijn zowel de coördinaten van de punten als de vectoren verticaal genoteerd.

FIGUUR 4, 5a en 5b









Gegeven zijn twee cirkels in twee onderling loodrechte vlakken zó dat het middelpunt van C_1 op C_2 ligt en omgekeerd (zie figuur 4). C_1 is de cirkel in het xy-vlak met vergelijking $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=1$, en C_2 is de cirkel $(x+\frac{1}{2})^2+z^2=1$ in het yz-vlak.
Kies punt A op C_1 en B op C_2 en trek daarin de raaklijnen l_a en l_b. Beide lijnen vormen een vlak als ze elkaar snijden op de y-as. Daarmee hoort bij het punt A op C_1 een punt B op C_2. De oloïde wordt gevormd door alle mogelijke lijnen AB die zo ontstaan.
We kunnen de parametrisatie van de oloïde als volgt berekenen:

De coördinaten voor het punt A zijn: $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\sin t_1\\ \cos t_1\\ 0\end{pmatrix}$ met de raaklijn

$$l_a:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\sin t_1\\ \cos t_1\\ 0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}\cos t_1\\ -\sin t_1\\ 0\end{pmatrix}$$

Voor het punt B zijn de coördinaten: $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}+\sin t_2\\ 0\\ \cos t_2\end{pmatrix}$ en raaklijn

$$l_b:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}+\sin t_2\\ 0\\ \cos t_2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}\cos t_2\\ 0\\ -\sin t_2\end{pmatrix}$$

Voor het snijpunt van l_a met de x-as geldt, omdat

$\lambda=\dfrac{\cos t_1}{\sin t_1}$, dat $x=\frac{1}{2}+\sin t_1+\dfrac{\cos^2 t_1}{\sin t_1}$

Voor het snijpunt van l_b is dat snijpunt voor

$\mu=\dfrac{\cos t_2}{\sin t_2}$ gelijk aan $x=-\frac{1}{2}+\sin t_2+\dfrac{\cos^2 t_2}{\sin t_2}$

Die twee snijpunten vallen samen als

$$\frac{1}{2}+\sin t_1+\frac{\cos^2 t_1}{\sin t_1}=-\frac{1}{2}+\sin t_2+\frac{\cos^2 t_2}{\sin t_2},$$

waaruit volgt:

$\sin t_2=\dfrac{\sin t_1}{1+\sin t_1}$ en dus $\cos t_2=\pm\dfrac{\sqrt{1+2\sin t_1}}{1+\sin t_1}$

Daarmee worden de coördinaten van B, uitgedrukt in t_1:

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}+\dfrac{\sin t_1}{1+\sin t_1}\\ 0\\ \pm\dfrac{\sqrt{1+2\sin t_1}}{1+\sin t_1}\end{pmatrix}$$

waarbij het plusteken en het minteken de bovenkant respectievelijk de onderkant van de oloïde vertegenwoordigen.
Het is een aardig sommetje om uit te rekenen dat de afstand $\overline{AB}$ voor iedere waarde van t_1 gelijk is aan $\sqrt{3}$. Dit maakt het mogelijk dat de oloïde net als een cilinder over een plat vlak kan rollen. De oloïde maakt daarbij echter een charmant wiegende beweging, waarop menig flanerend strandganger jaloers zou zijn.

De lijn AB heeft dus als vectorvoorstelling $\overline{x}=\overline{a}+\lambda(\overline{b}-\overline{a})$:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\sin t_1\\ \cos t_1\\ 0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}+\dfrac{\sin t_1}{1+\sin t_1}-\frac{1}{2}-\sin t_1\\ 0-\cos t_1\\ \pm\dfrac{\sqrt{1+2\sin t_1}}{1+\sin t_1}-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\lambda+(1-\lambda)\sin t_1+\dfrac{\lambda\sin t_1}{1+\sin t_1}\\ (1-\lambda)\cos t_1\\ \pm\dfrac{\lambda\sqrt{1+2\sin t_1}}{1+\sin t_1}\end{pmatrix}$$

Hiermee is de oloïde in geparametriseerde vorm geschreven:

$$\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-y+(1-y)\sin x+\dfrac{y\sin x}{1+\sin x}\\ (1-y)\cos x\\ \pm\dfrac{y\sqrt{1+2\sin x}}{1+\sin x}\end{pmatrix}$$

Nu is de vorm geschikt om in bijvoorbeeld Maple (zie [2]) een 3D-plaatje te maken, waarbij je de oloïde fraai van alle kanten kunt bekijken (zie de figuren 5a en 5b).

Meer wiskunde

Wie zich nu verder wil uitleven in de eigenschappen van de oloïde kan zijn gang gaan. Zo valt te bewijzen dat de oppervlakte van de oloïde gelijk is aan de oppervlakte van de bol met straal 1.
Daarnaast is er duidelijk sprake van enkele symmetrie-eigenschappen. Overigens moet je nog wel aan het werk om die te bewijzen.
Lezers die zich verder willen verdiepen in het werk van Paul Schatz kan ik aanraden zijn boek *Rhythmusforschung und Technik* te bestellen via *www.paul-schatz.ch*. Via dat adres is ook een uitslag van de oloïde te koop. Zelfs degenen die van plakken en knippen houden, komen zo nog aan hun trekken. Wie nog goedkoper uit wil zijn, moet [1] downloaden en vindt dan ook een diepere analyse van de oloïde. De oloïde is duidelijk een object waaraan veel plezier valt te beleven. En niet alleen door Heleen.

Referenties

[1] H. Dirnböck, H. Stachel: The development of the Oloid. In: Journal of Geometry and Graphics, vol 1 (1997) No. 2, pp. 105-118. Te vinden op www.geometrie.tuwien.ac.at/geom/bibtexing/fg3.html#1997
[2] Een Maple-bestand met een grafische weergave van de oloïde is te downloaden op www.rgomiddelharnis.nl/leerlingen/vaklokalen/wiskunde.

Overige websites

- *www.oloid.ch*
- *www.ifest.be/ned/2000_innovation_11.aspx*
- *www.arabesk.nl*

Over de auteur

Swier Garst (e-mailadres: garst@planet.nl) is leraar wiskunde aan de regionale scholengemeenschap Goeree en Overflakkee, en LION (leraar in onderzoek) aan de TU Delft.

Van de bestuurstafel

[Marian Kollenveld]

Een kernthema van de jaarrede, en dus van het bestuur van de vereniging, was dat wij ons vak in eigen hand moesten nemen. Als je dat eenmaal hebt gezegd, ben je meteen van een heleboel vrije tijd af.
In deze bestuurstafel praten we u weer even bij.

Onderbouw

In de nieuwe onderbouw zal wiskunde een apart vak blijven, en niet opgaan in een leergebied. Maar dat betekent niet dat er dus geen samenhang mag zijn met andere vakken, integendeel. De NVvW heeft daarom een veldaanvraag ingediend met het verzoek te onderzoeken hoe wiskunde vorm kan krijgen in een school die zich profileert als bètaschool.

Tweede fase; nieuwe wiskundeprogramma's

We wijzen de plannen van de minister met de Tweede fase voor 2007 onverminderd af. Maar de realiteit is dat deze wél door de Tweede Kamer zijn aanvaard.
De reactie van de NVvW met voorstellen voor de reducties in de nieuwe programma's is inmiddels hopelijk verstuurd naar iedereen van wie we weten dat hij/zij belangstelling heeft en van wie we het mailadres hebben. Mocht u geen bericht hebben ontvangen en toch geïnteresseerd zijn, stuurt u dan een berichtje naar de ledenadministratie, dan komt dat alsnog in orde.
Op 1 februari jl. is er in opdracht van het ministerie een conferentie georganiseerd waar zo mogelijk de vijf definitieve programma's uit rollen. Hiervoor zijn vier vertegenwoordigers van de NVvW uitgenodigd. De uitslag hiervan zullen we uiteraard aan de leden voorleggen. De docent moet het doen, nietwaar? De toets of de programma's overladen zijn, vindt uiteindelijk in de klas plaats.
Er zal ook gesproken worden over de verdeling van de stof in een CE- en een SE-gedeelte van 60% respectievelijk 40%. Dat is een maatregel die voor alle vakken geldt, zoals gebruikelijk zonder te kijken naar de verschillen tussen de vakken. De boeken van Nederlands en de sommen van wiskunde op hetzelfde bergje.
In de klas maakt het niet zoveel uit, de docent is wat vrijer in het behandelen en toetsen van de SE-stof. Of exacte vervolgopleidingen blij zullen zijn als ze merken dat slechts 60% van de gereduceerde wiskundeprogramma's centraal getoetst is, zal de toekomst leren. Het is ze vast niet tevoren gevraagd.

Wis- en natuurkunde

Samen met de vereniging van docenten natuurkunde (NVON) hebben we een veldaanvraag ingediend bij de SLO om geïntegreerd lesmateriaal te (laten) vervaardigen voor wiskunde en natuurkunde. Er is hierover een kleine NVvW/NVON-commissie gevormd. We zoeken nog enkele wiskundigen met affiniteit voor natuurkunde: dus meldt u aan als het u wat lijkt om mee te doen.
We doen het maar zelf, want van initiatieven om op het niveau van de programma's tot afstemming te komen is tot nu toe niets terechtgekomen. Niet bij de start van de Tweede fase, niet bij deze herziening, en ook voor de toekomst zijn of worden er inmiddels aparte commissies gevormd om het onderwijs in natuurkunde, scheikunde en biologie te ontwikkelen. Gemiste kansen uit het verleden zetten zich zo moeiteloos voort in de toekomst. Kennelijk lukt het niet om op beleidsniveau echt te leren van fouten.

C2

Deze eigentijdse afkorting staat voor CTWO, Commissie Toekomst WiskundeOnderwijs. De naam zegt wat er gedaan gaat worden. Het is een gezamenlijk initiatief van NVvW en NOCW (Nederlandse OnderwijsCommissie voor de Wiskunde).
Na alle afbraak van de laatste tijd waar de inhoud ondergeschikt was aan het systeem en de getallen (wat een klacht voor een wiskundige!), hadden we er ernstig behoefte aan om te bezien hoe de toekomst vanuit een inhoudelijk perspectief eruit zou kunnen zien. Welke wiskunde is relevant voor onze leerlingen in de toekomst? De commissie is breed samengesteld, zodat er kennis is van hbo, wo en vo.

Platform voor de wiskunde

Inmiddels is ons internetforum in de lucht. Dit discussieforum is open voor leden van de vereniging. Uitgangspunt is dat het bestuur graag de mening van de leden wil vernemen, bijvoorbeeld over de inhoud van het manifest 'Wiskundedidactiek anno 2005'. Uit de reacties gaat het bestuur zijn (actie)plannen voor de komende tijd afstemmen. Met andere woorden: laat horen wat u ervan denkt! Als uw e-mailadres nog niet bekend is bij de ledenadministratie, kunt u zich op de website laten registreren zodat u kunt inloggen en meediscussiëren. Doe mee!

Forumdiscussie website [Jacob Hop]

Voor het eerst heeft er op de website van de NVvW een forumdiscussie plaatsgevonden, en wel naar aanleiding van het manifest '**Wiskundedidactiek anno 2005**'.
De komende maanden zullen er regelmatig forumdiscussies met de leden worden gevoerd via *www.nvvw.nl*.
De discussies zullen gaan over specifieke onderwerpen uit het manifest, maar ook over actuele ontwikkelingen met betrekking tot de herinrichting van de Tweede fase of de vernieuwde Basisvorming. Dus hou de site in de gaten en discussieer mee!

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Verenigingsnieuws
Beeldverslag studiedag/ jaarvergadering 2004

Op 6 november jl. werd de jaarlijkse NVvW-jaarvergadering/studiedag gehouden, met dit keer als thema: ‘Voor Wie Welke Wiskunde?’
De gastschool, het Oosterlicht College in Nieuwegein, leende zich uitstekend voor een dag als deze. Er was een theaterzaal voor de plenaire gedeelten en een royale aula waar lunch en markt gehouden konden worden; al met al volop gelegenheid om elkaar te spreken en veel op te steken.

Foto 1 - Markt.
Foto 2 - Marian Kollenveld opent de dag in de theaterzaal en kondigt daarbij de nieuwste twee uitgaven in de Zebra-reeks aan.
Foto 3 - Plenaire zitting in de theaterzaal. Op de voorgrond prof. dr. Jan van de Craats, daarnaast Henk Bijleveld, Wim Kuipers, Marian Kollenveld en Swier Garst van het hoofdbestuur.
Foto 4 - Marianne Lambriex, organisator van de studiedag, heeft zoals gewoonlijk weer alles onder controle.
Foto 5 - Jan van de Craats geeft nogal wat aanleiding tot gespreksstof met zijn voordracht ‘Basiswiskunde voor havo en vwo: wat moet er in en waarom?’ De discussie daarover zal worden voortgezet.
Foto 6 en 7 - Applaus in de theaterzaal als Jan van de Craats door Swier Garst bedankt wordt voor zijn voordracht.
Foto 8 - We kunnen kennismaken met Ionica Smeets, die in december 2004 begint met haar taak als PR-vrouw voor de wiskunde in Nederland.
Foto 9 - Jan van de Craats in gesprek met Sieb Kemme.
Foto 10 - Workshop ‘Wiskunde Digitaal’, geleid door Metha Kamminga.
Foto 11 - Workshop ‘Experimenten met de GR in het vmbo’, met op de achtergrond Peter van Wijk.
Foto 12 - Lunch in de aula; op de achtergrond de markt.
Foto 13 - Netwerken tijdens de lunch, met op de voorgrond Heiner Wind, trouw bezoeker van de jaarlijkse studiedag.
Foto 14 - Twee deelnemers aan de lunch: Rob van Oord (links) en Wim van Dijk (rechts).
Foto 15 - De inschrijving voor de studiedag en de indeling van de workshops wordt al jarenlang geregeld door Frans Osseweijer (links). Hier is hij in gesprek met Wim van Dijk.
Foto 16 - Herman te Riele, secretaris van het Koninklijk Wiskundig Genootschap, geeft voorlichting en werft leden voor het KWG.
Foto 17 - Onze jongste deelnemer heeft veel interesse in de puzzels en wiskundige speeltjes die weer volop aangeboden worden.
Foto 18 - Wiskundige puzzels zijn voor Dini Franke een uitdaging.
Foto 19 - De workshops zetten je aan het denken!
Foto 20 - Sacha van Looveren met de workshop ‘Wiskunde door het vizier van een scholier’, één van de winnende projecten van de Wiskunde Scholen Prijs 2004. Op de achtergrond (staand) bestuurslid Jacob Hop.
Foto 21 en 22 - Het Amerikaanse cijferwonder Scott Flansburg is in Nederland om te laten zien hoe leuk rekenen kan zijn. Chris Zaal regelde zijn komst naar de studiedag alwaar Flansburg de slotvoordracht hield. Door deze *Human Calculator* werden nieuwe rekentrucjes gedemonstreerd om snel foutloos te kunnen hoofdrekenen. De berekeningen werden intussen gecontroleerd met de rekenmachine.

Tekst: Metha Kamminga
(e-mailadres: m.kamminga@nvvw.nl)
Foto’s: Metha Kamminga en Ron Lambriex












6


12


18

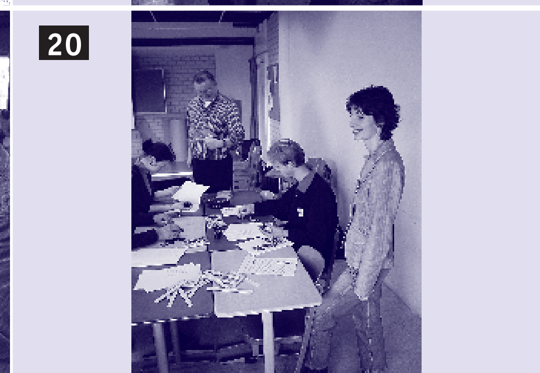

7


13


19

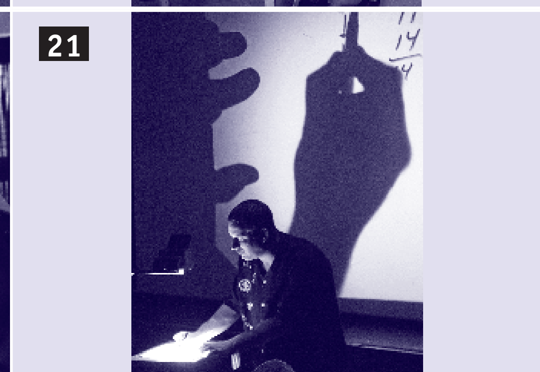

8


14

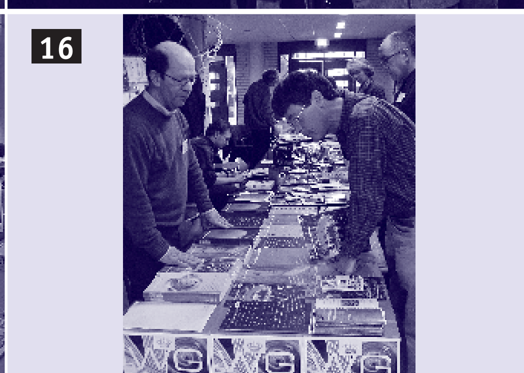

20

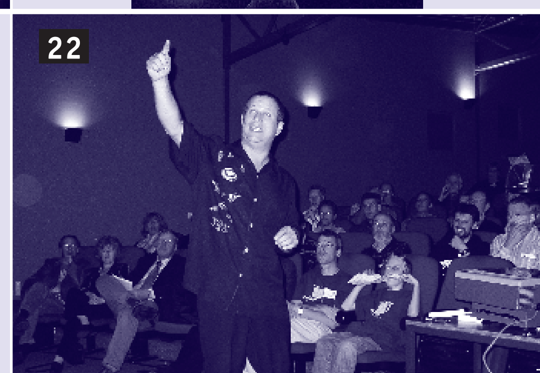

9

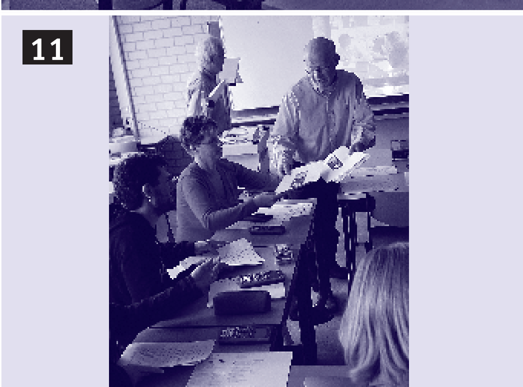

15


21


10


16


22


11


17

Puzzel 805 - Clusters

Als we van de getallen 1 tot en met n er een aantal willekeurig aanwijzen, kan het gebeuren dat daar een rijtje opvolgende getallen bij zit. Dit is wat we hier een cluster noemen. In figuur 1 ziet u een voorbeeld voor $n = 12$. De getallen zijn hier door genummerde cellen weergegeven; het aanwijzen van de cel gebeurt door er een bal in te deponeren. Het gebruik van cellen of vazen en ballen of knikkers is in de kansrekening schering en inslag, en het is vaak een handige manier om naar een probleem te kijken. In de figuur zien we drie clusters: (2), (5,6,7) en (11,12).
De getallen 5 en 6 vormen weliswaar een rijtje opvolgende getallen, maar dat rijtje is geen cluster. Een formele definitie lijkt me niet nodig.

Opgave 1

Bepaal het verwachte aantal clusters als functie van k en n.

Als antwoord is de formule voldoende; een bewijs wordt niet gevraagd. Wel zou ik graag weten hoe u het antwoord hebt gevonden: via de kansverdeling, of rechtstreeks, of misschien nog anders?

Model B

Er zijn n cellen, genummerd 1, 2, ..., n. Per cel loten we met een vaste kans p of er een bal in de cel komt. (Het verwachte aantal ballen is dus np.) De lotingen zijn onderling onafhankelijk.

Opgave 2

Bepaal het verwachte aantal clusters.



FIGUUR 1

Clusters treden bijvoorbeeld op als een filatelist in een catalogus aanstreept welke zegels tot zijn verzameling behoren. Zelf kwam ik op het idee om clusters te bestuderen via een probleem uit de getallentheorie. Dat leidde weer tot de opgaven van deze keer, die overigens niets met getallentheorie maar alles met kansrekening te maken hebben.

Om te beginnen moeten we het 'willekeurig aanwijzen' preciseren. Er zijn twee voor de hand liggende mogelijkheden.

Model A

Voor een vast getal k $(1 \le k \le n)$ wijzen we k verschillende getallen aan. Alle $\binom{n}{k}$ mogelijkheden hebben dezelfde kans.
(U kunt dit zien als k aselecte trekkingen zonder teruglegging uit de verzameling van de n cellen.)

Opgave 3 is een keuzevraagstuk. U mag naar verkiezing 3a of 3b oplossen. Allebei mag natuurlijk ook, maar het levert geen extra punten op.

Opgave 3a

Bepaal de kansverdeling van het aantal clusters voor $p = \frac{1}{2}$ en alle n.

Opgave 3b

Bepaal de kansverdeling van het aantal clusters voor $p = \frac{1}{3}$ en $n = 10$.

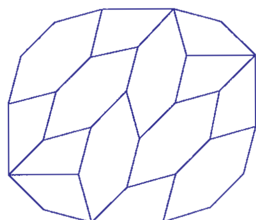
Oplossingen kunt u mailen naar *a.gobel@wxs.nl* of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede. Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing.

De deadline is 20 maart 2005. Veel plezier!

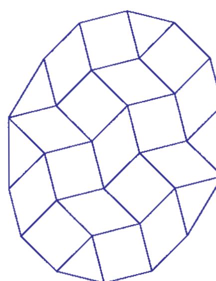
Oplossing 'Wiskundige legpuzzels'

Er kwamen acht oplossingen binnen. Dit aantal viel me niet tegen; blijkbaar was het knutselwerk geen groot struikelblok. Een van de inzenders gebruikte een tekenprogramma voor het puzzelen.

Bijna alle inzenders hebben behalve de gevraagde veelhoeken ook andere ingestuurd, hetzij met een ander aantal hoekpunten of een ander aantal stukjes. Van de 14-hoek met 20 stukjes kwamen twee verschillende oplossingen binnen; de mooiste ziet u in figuur 2. De zeshoeken moeten natuurlijk nog in tweeën worden verdeeld. In de andere oplossing voor de 14-hoek heeft L.H. van den Raadt de stukjes langs de korte diagonaal doorgesneden en daarna gelijke driehoeken samengevoegd; zie figuur 3. Hij verfraaide het geheel nog door de veelhoeken met een hoek van 60 graden groen te kleuren en de andere rood. W. van den Camp stuurde twee fraai gekleurde oplossingen van de 16-hoek, met Cabri gemaakt.



FIGUUR 2



FIGUUR 3

Vijf van de inzenders hebben terecht getwijfeld aan mijn vermoeden dat 18 hoekpunten het hoogst haalbare zou zijn voor een convexe veelhoek, en drie van hen bewezen dat 16 het maximum is.

Voor de kerstprijs kwamen in eerste instantie drie inzenders in aanmerking: L. de Rooij, W. Doyer en A. Verheul. Alle drie besteedden veel aandacht aan andere convexe veelhoeken en aan wiskundige aspecten. Na veel wikken en wegen bleef W. Doyer over van dit drietal. Zij bepaalde o.a. alle paren (h, n) waarvoor een convexe h-hoek met n stukjes mogelijk is. De ladderprijs is gewonnen door A. Verheul. Beide winnaars gefeliciteerd!

In de opgave (in het decembernummer van Euclides) was in de figuur met de zevenhoek het onderliggende rooster helaas niet overgekomen. Zodoende was het voor sommige inzenders moeilijk om hun figuur op de juiste wijze op het rooster te zetten. Om kort te gaan: hier is een beetje gesmokkeld! Maar gelukkig was er nooit een misverstand over de bedoelde figuur.

Ladderstand

De kop van de ladder:
A. Verheul 253,
L. de Rooij 252,
L. van den Raadt 210,
J. Meerhof 174,
T. Kool 163,
W. Doyer 162,
W. van den Camp 100.

De complete ladderstand is te zien op de website van Euclides: *www.nvvw.nl/euclladder.html*.

Kalender

In deze kalender kunnen alle voor wiskunde-docenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (*redactie-euclides@nvvw.nl*).
Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de komende jaargang. Achter de verschijningsdata is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen (en van de *eind*versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html*).

nr	verschijnt	deadline
6	14 april 2005	1 maart 2005
7	26 mei 2005	5 april 2005
8	23 juni 2005	10 mei 2005

dinsdag 8 maart (ook op 5 april)
Cursus Ruimtemeetkunde met ICT
Organisatie Freudenthal Instituut

do. 17 en vr. 18 maart, Noordwijkerhout
Nationale Rekendagen
Organisatie Freudenthal Instituut

vrijdag 18 maart
Kangoeroe-wedstrijd
Organisatie Radboud Universiteit Nijmegen

woensdag 27 april, Utrecht
Conferentie 'Kritisch (leren) werken bij wiskunde en in de praktijk'
Organisatie NVvW-werkgroep hbo

vrijdag 13 mei
Open dag 'Leve de wiskunde'
Organisatie FNWI, Uva

vr. 20 tm. zo 22 mei, Gent (B)
BeNeLuxFra Conference in Mathematics
Organisatie (oa.) KWG

zaterdag 28 mei, Utrecht
Symposium XI: Kansen en verwachtingen
Organisatie HKRWO

Voor nascholing zie ook
www.nvvw.nl/nascholing.html

Voor overige internet-adressen zie
www.nvvw.nl/Agenda2.html

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie
www.wiskundeonderwijs.nl



Publicaties van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

*** *Zebra-boekjes***

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde

* *Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo*
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

* *Wisforta* - wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

* *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*, lustrumboek van de NVvW.
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW (*www.nvvw.nl/lustrumboek2.html*).

Voor overige NVvW-publicaties zie de website:
www.nvvw.nl/Publicaties2.html


15 | 10 | 2004 t/m 10 | 04 | 2005
TERINGZOOI
Infectieziekten op zicht
MUSEUM BOERHAAVE
LEIDEN

Nieuw bij Moderne wiskunde 8 Werkboek Algebra plus

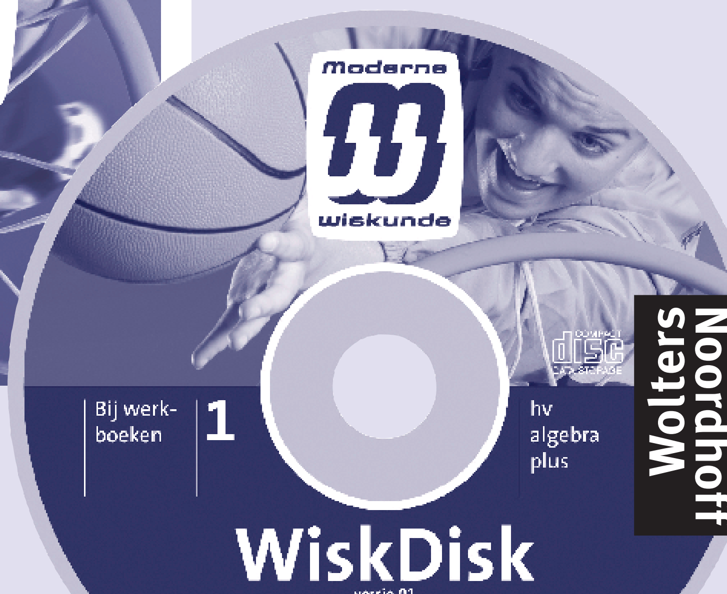
Werkboek
Algebra plus



1 | Deel A | havo vwo



- **voor havo/vwo**
  (1 havo/vwo nu verkrijgbaar, 2 havo/vwo en 2 vwo in 2005, delen 3 in 2006)
- **meer oefening van technische en algebraïsche vaardigheden**
- **complexe opdrachten**
- **hoofdstukoverstijgende oefeningen**
- **extra opdrachten met de computer**



Wolters Noordhoff

Nieuwsgierig?
Vraag beoordelingsexemplaren aan bij de afdeling Voorlichting Exact
T (050) 522 63 11 of e-mail:
modernewiskunde@wolters.nl.

Neem ook eens een kijkje op de site:
www.modernewiskunde.wolters.nl

Wolters-Noordhoff
Postbus 58
9700 MB Groningen